

برنامه‌ریزی قطارهای راه‌آهن شهری با هدف کاهش زمان انتظار مسافری با الگوریتم ابتکاری آزادسازی لاگرانژ

چکیده

امروزه راه‌آهن شهری، یک سامانه حمل‌ونقل ایمن و قابل‌اعتماد در مناطق شهری است که بهینه‌سازی حرکت قطارها در آن یک نقش اساسی در کاهش هزینه‌های عملیاتی، بهبود سطح خدمت و کاهش زمان انتظار ایفا می‌کند. افزایش زمان انتظار مسافرین موجب کاهش سطح خدمت و در نتیجه کاهش مطلوبیت استفاده از سیستم حمل‌ونقل ریلی می‌شود. در این تحقیق، مسئله زمان‌بندی حرکت قطارهای راه‌آهن شهری در مسیرهای دوخطه ریلی با هدف کاهش زمان کل انتظار مسافرین در ایستگاه‌ها مدنظر قرار گرفته است. برای این منظور، یک مدل برنامه‌ریزی خطی عددصحیح جدید مبتنی بر مفاهیم شبکه مکان-زمان جهت زمان‌بندی اولیه حرکت قطارها ارائه شده است. نوآوری‌های پژوهش حاضر در توسعه مدل زمان‌بندی حرکت قطارها با در نظر گرفتن نرخ ورود وابسته به زمان و تحت محدودیت‌های ظرفیتی ناوگان، ظرفیت قطار و زیرساخت ریلی است. با توجه به پیچیدگی‌های محاسباتی مسئله، یک روش حل ابتکاری کارا مبتنی بر الگوریتم آزادسازی لاگرانژ ارائه شده است. اعتبارسنجی مدل بهینه‌سازی و روش پیشنهادی به کمک آزمایش‌های عددی و بر اساس داده‌های عملیاتی از خطوط راه‌آهن شهری تهران انجام شده است. نتایج تجربی نشان می‌دهد که حتی در مسائل با ابعاد بزرگ، رویکرد حل مسئله دارای کیفیت جواب مناسب و زمان محاسباتی قابل‌قبولی بوده که این موضوع نشان‌دهنده کارایی آن در برنامه‌ریزی قطارهای راه‌آهن شهری است. نتایج محاسباتی نشان می‌دهد که با ثابت نگه داشتن تعداد دفعات اعزام قطارها و تنها با تغییر سرفاصله زمانی اعزام می‌توان برنامه زمان‌بندی که انطباق بهتری با الگوی تقاضای سفر دارد، تولید نمود که در نتیجه موجب کاهش زمان انتظار مسافرین می‌شود.

واژه‌های کلیدی: آزادسازی لاگرانژ، حمل‌ونقل ریلی، راه‌آهن زیرزمینی، زمان انتظار مسافر، ظرفیت قطار

۱. مقدمه

یکی از وظایف اصلی سامانه‌های حمل و نقل عمومی، از جمله راه‌آهن شهری، ارائه خدمات مقرون به صرفه و کارآمد حمل و نقل به کاربران است [Beirão and Cabral, 2007]. ناکارآمدی سامانه‌های حمل و نقل موجب افزایش زمان انتظار و سفر مسافران خواهد شد. یکی از مشکلات برنامه‌ریزی در خطوط راه‌آهن شهری، وجود محدودیت‌های ظرفیتی و نیز تغییرات تقاضا است [Canca et al., 2014]. وجود این مشکلات موجب افت قابلیت اطمینان، افزایش هزینه‌های عملیاتی و کاهش سطح رضایت‌مندی مسافری می‌شود [Visentini et al., 2013]. به دلیل رقابت بین انواع شیوه‌های حمل و نقل عمومی، بهبود اثربخشی عملیات در شرکت‌های راه‌آهن شهری به یک مسئله و ضرورت اساسی تبدیل شده است [Kabasakal, Kutlar, and Sarikaya, 2013].

برنامه‌ریزی جدول زمانی قطارها در راه‌آهن شهری عمدتاً طی فرآیندهای سنتی انجام می‌شود که این موضوع باعث انعطاف‌ناپذیری و ناکارآمدی در برنامه‌ریزی عملیاتی شده است. بدیهی است، رضایت مسافر با کاهش سرفاصله (افزایش تواتر اعزام) افزایش می‌یابد. از طرفی کاهش سرفاصله زمانی موجب افزایش هزینه‌های عملیاتی شرکت‌های راه‌آهن می‌شود [Wang et al., 2017]. زمان‌بندی حرکت قطارهای راه‌آهن شهری، یک فرآیند پیچیده است. جهت مؤثر نمودن این فرآیند لازم است الگوهای متغیر تقاضای مسافر، محدودیت ناوگان در دسترس و مجموعه‌ای از مقررات و ملاحظات سیر و حرکت در نظر گرفته شود [Niu and Zhou, 2013]. تغییرات زمان انتظار در طول مسیر موجب کاهش سطح خدمات و در نتیجه کاهش مطلوبیت استفاده از سیستم حمل و نقل ریلی می‌شود. بر این اساس، به حداقل رساندن زمان انتظار مسافری بسیار حائز اهمیت است [Kang et al., 2014]. تمرکز این پژوهش نیز بر مدل‌سازی مسئله برنامه‌ریزی و زمان‌بندی حرکت قطارهای راه‌آهن شهری زیرزمینی در مسیرهای دوخطه با توجه به محدودیت اندازه ناوگان، حداکثر تعداد اعزام‌ها، ظرفیت قطار و تقاضای سفر وابسته به زمان است.

یکی از معیارهای مهم اندازه‌گیری کیفیت ارائه خدمات حمل و نقل عمومی زمان انتظار متوسط برای مسافران است [Wheat and Wardman, 2017]. مسائل مربوط به برآورد و به حداقل رساندن زمان انتظار، توجه تحقیقات را به خود جلب کرده است. از جمله تحقیقات اولیه در زمینه برآورد و تقریب متوسط زمان انتظار مسافری در سیستم حمل و نقل، آن را تابعی از میانگین و واریانس زمان هدوی حرکت وسایل نقلیه بدست آورده‌اند [Welding, 1957]. امین‌ناصری و برادران (۲۰۱۴) رابطه دقیق‌تری برای برآورد زمان انتظار در یک ایستگاه اتوبوس در حالت زمان‌بندی با سرفاصله‌های زمانی مستقل و وابسته ارائه نموده‌اند. آن‌ها همچنین به منظور بررسی دقت روابط پیشنهادی یک مدل شبیه‌سازی گسسته توسعه داده‌اند [Amin-Naseri and Baradaran, 2014]. دسته دیگر تحقیقات، به مسئله کمینه‌سازی زمان انتظار مسافری به کمک مدل‌های بهینه‌سازی پرداخته‌اند. یک راه بسیار معمول جهت به حداقل رساندن متوسط زمان انتظار مسافران استفاده از سرفاصله‌های زمانی ثابت در جداول زمانی حرکت است. این نوع سیاست در سامانه‌های مختلف حمل و نقل عمومی مانند راه‌آهن، به دلیل سادگی و قابلیت اجرایی شدن بالا بسیار مقبول است اگرچه لزوماً به حداقل شدن زمان‌های انتظار مسافری نمی‌انجامد. از طرفی، شرکت‌های راه‌آهن شهری، از تعداد محدودی قطار در طول یک دوره عملیات روزانه، به دلیل هزینه‌های بالای عملیاتی و نگهداری استفاده می‌کنند و تعداد کل اعزام‌ها نیز از سقف مشخصی فراتر نمی‌رود. تحت شرایط تقاضای وابسته به ایستگاه و نیز زمان، برنامه حرکت با سرفاصله زمانی ثابت ممکن است منجر به افزایش زمان انتظار مسافری به دلیل محدودیت ظرفیت قطار و گردش نامناسب قطارها در مسیر شود [Hassannayebi et al. 2016]. از این رو، برنامه‌ریزی حرکت قطارها با هدف کاهش متوسط زمان انتظار مسافری به طور خاص مورد مطالعه قرار گرفته است.

بر اساس آمار سال ۱۳۹۵، روزانه حدود ۲ میلیون سفر بطور روزانه در متروی شهر تهران انجام می‌شود. در این شرایط، بروز یک تغییرات تقاضای سفر در راه‌آهن شهری، موجب تاخیرات و افزایش زمان انتظار تعداد زیادی از مسافری خواهد شد. همچنین تعداد مسافران سوار و پیاده شده در هر ایستگاه یکی از داده‌های ورودی مهم در مطالعات برنامه‌ریزی عملیات حمل و نقل ریلی شهری است و در حال حاضر این اطلاعات با مطالعات ترافیکی تعیین می‌شود. در مرحله برنامه‌ریزی، بر اساس این داده‌های ورودی، توزیع سرفاصله‌های زمانی برای روزهای مختلف هفته و تعطیلات محاسبه می‌شود. با توجه به شرایط گفته شده از راه‌آهن شهری تهران، ضرورت تحقیق حاضر را می‌توان در موارد زیر خلاصه نمود:

- برآورده‌سازی اهداف کوتاه‌مدت و بلندمدت برنامه‌ریزی راه‌آهن شهری

- لزوم ارتقای بهره‌وری عملیات حمل‌ونقل راه‌آهن شهری
 - صرفه‌جویی در زمان سفر مسافری با حفظ هزینه‌های عملیاتی
- در سامانه‌های راه‌آهن شهری، جریان پویای مسافری باید به نحو مطلوبی مدیریت شود. زمان‌بندی بهینه حرکت قطارها با توجه به محدودیت‌های ظرفیتی، یکی از مؤثرترین راهکارهای ارتقاء سطح خدمت است. در این مقاله، یک فرمول‌بندی جدید از مسئله زمان‌بندی قطارهای راه‌آهن شهری با فرض تقاضای سفر متغیر با زمان ارائه شده است. از جمله نوآوری‌های این تحقیق شامل ارائه یک مدل جدید مبتنی بر شبکه مکان-زمان برای زمان‌بندی قطارهای راه‌آهن شهری و یک روش ابتکاری کارا مبتنی بر آزادسازی لاگرانژ و تجزیه توسعه است.

۲. مرور تحقیقات گذشته

تحقیقات پیشین در زمینه برنامه‌ریزی راه‌آهن شهری را می‌توان به برنامه‌ریزی اولیه، بهینه‌سازی تصادفی، کنترل آنالین و مدل‌های مدیریت اختلال طبقه‌بندی نمود [Yang et al., 2016b]. در ادامه، این تحقیقات در قالب دسته‌بندی گفته شده، نقد و بررسی خواهند شد. دسته‌بندی مقالات زمان‌بندی قطارها مبتنی بر تقاضای سفر در خطوط ریلی درون‌شهری در جدول ۱ خلاصه شده است. در راه‌آهن شهری، طراحی یک برنامه زمان‌بندی با هدف کمینه کردن زمان‌های انتظار مسافری برای تعویض خط و مسیر، مسئله‌ای بسیار دشوار بوده و به مسئله $TTSP^1$ معروف است. در تحقیقی از وانگ و همکاران (۲۰۰۸) به هم‌زمانی حرکت قطارها در بین خطوط مختلف با هدف کمینه کردن زمان جابجایی و انتظار مسافری پرداخته شده است [Wong et al., 2008]. برای مسئله فوق که یک مسئله زمان‌بندی غیردوره‌ای است، یک مدل برنامه‌ریزی عددصحيح مختلط ارائه شده است. مدل پیشنهادی قادر است با تنظیم زمان‌های سیر قطارها، زمان توقف در ایستگاه‌ها، زمان اعزام و گردش در پایانه، یک برنامه زمان‌بندی بهینه با کمترین زمان انتظار مسافری در ایستگاه‌های تعویضی تولید کند. یک روش حل بهینه‌سازی ابتکاری برای مسئله ارائه شده و کارایی آن روی نمونه مسائلی از راه‌آهن شهری هنگ‌کنگ، شامل ۶ خط و تعداد زیادی ایستگاه‌های تقاطعی، ارزیابی شده است. در تحقیقی از آلبرت (۲۰۰۹) یک رویکرد بهینه‌سازی دومارحله‌ای برای تعیین برنامه زمان‌بندی بهینه در خطوط راه‌آهن شهری ارائه شده است [Albrecht, 2009]. حجم ترافیک با در نظر گرفتن تغییرات تقاضا در طول روز، به کمک یک ماتریس سفر مبدا-مقصد نمایش داده می‌شود. شفاهی و خانی (۲۰۱۰) مسئله برنامه‌ریزی در یک شبکه حمل‌ونقل را با هدف به حداقل رساندن زمان انتظار مسافری در ایستگاه‌های تقاطعی، موردبررسی قرار داده‌اند [Shafahi and Khani, 2010]. سرفاصله زمانی در هر خط حمل‌ونقل معلوم بوده و فرض شده است که در طول مدت زمان برنامه‌ریزی، مقداری یکنواخت و ثابت باشد. این فرض نه تنها برای یک دوره زمانی (به عنوان مثال، ساعات اوج) قابل قبول است، بلکه در اکثر شبکه‌های حمل‌ونقل شهری نیز بطور موفقیت‌آمیزی اجرا شده است. برای این مسئله ابتدا، یک مدل برنامه‌ریزی عددصحيح مختلط ارائه شده است که در آن زمان اعزام وسایل نقلیه در خطوط مختلف تعیین می‌شود. سپس این مدل با توجه به امکان توقف اضافی وسایل نقلیه در ایستگاه‌های تقاطعی، به عنوان یک متغیر جدید، تعمیم داده شده است. مقیاس مدل‌های پیشنهادی، در مقایسه با مدل‌های موجود، به اندازه کافی کوچک بوده و این مدل می‌تواند برای شبکه‌های کوچک و متوسط با استفاده مستقیم از نرم‌افزار CPLEX حل شود. علاوه بر این، یک الگوریتم ژنتیک برای حل مسئله در شبکه‌های بزرگ‌تر پیشنهاد شده است. نتایج حاصل از پیاده‌سازی رویکرد پیشنهادی در شبکه حمل‌ونقل شهر مشهد، کارایی این مدل را نشان داده است.

در مقاله‌ای از کانکا و همکاران (۲۰۱۳) یک مدل برنامه‌ریزی عددصحيح غیرخطی برای تهیه برنامه زمان‌بندی غیردوره‌ای حرکت قطارها با در نظر گرفتن تقاضای مسافری ارائه شده و به عنوان مطالعه موردی روی خط C5 از شبکه راه‌آهن شهری سریع‌السير مادرید اسپانیا مورد ارزیابی قرار گرفته است [Canca et al., 2014]. جنبه‌هایی از مسئله که به آن‌ها تأکید شده است، رفتار تقاضای مسافری در طول زمان، ظرفیت قطارها و معیارهای ارزیابی کیفیت برنامه زمان‌بندی است. در مدل ارائه شده، متغیرهای تصمیم اصلی شامل تعیین تعداد قطارهای لازم برای زمان‌بندی جهت برآورده کردن تقاضا، زمان ورود و اعزام قطارها در ایستگاه‌ها، زمان توقف قطارها در ایستگاه‌ها، توقف یا عدم توقف قطارها در ایستگاه‌ها است. طول هر بلاک و حدود حداقل و حداکثر سرعت روی هر بلاک به عنوان

ورودی مسئله فرض شده است. تابع هدف اصلی، کمینه کردن متوسط زمان انتظار مسافری در نظر گرفته شده است. همچنین ارزیابی برنامه زمان‌بندی بر اساس دو تابع هدف متوسط تعداد قطارهای در حال انتظار و متوسط زمان انتظار مسافری انجام شده است. این مسئله بهینه‌سازی دوهدفه به روش تبدیل به قید و با ثابت نگه‌داشتن پارامترهای ظرفیت کلی خط، حل شده و بهینه پارتوی مسئله بهینه‌سازی دوهدفه نیز استخراج شده است. در مقاله‌ای از بارنا و همکاران (۲۰۱۴a) مدل‌های برنامه‌ریزی عددصحيح و روش‌های حل دقیق برای مسئله زمان‌بندی قطارها در مسیرهای تک‌خطه با در نظر گرفتن الگوی تقاضای پویای مسافری و با هدف کمینه کردن متوسط زمان انتظار مسافری، ارائه شده است [Barrena et al., 2014a]. مدل پیشنهادی قادر به در نظر گرفتن انواع مختلفی از توابع تقاضای سفر مانند توابع غیریکنوا و نامحدوب است. در تحقیق دیگری از بارنا و همکاران (۲۰۱۴b) برای مسئله زمان‌بندی قطارها، چهار مدل برنامه‌ریزی عددصحيح ارائه شده است که مدل اول، یک مدل غیرخطی عددصحيح مختلط بوده و متغیرهای صفر و یک آن زمان‌های اعزام قطارها است [Barrena et al., 2014b]. سایر مدل‌های ارائه شده، برنامه‌ریزی خطی عددصحيح مختلط هستند. برای حل مسائل تحقیق از روش انشعاب و برش ($B\&C^*$) استفاده شده است. چند دسته نامساوی معتبر برای برش فضای جواب مسئله در الگوریتم انشعاب و برش پیشنهاد شده است. الگوریتم ارائه شده روی نمونه مسائل واقعی از خط C5 راه‌آهن شهری شهر مادرید اسپانیا ارزیابی شده است. نیو و ژو (۲۰۱۳) یک مدل بهینه‌سازی برنامه زمان‌بندی قطارها در مسیرهای تک‌خطه راه‌آهن شهری پیشنهاد کرده‌اند [Niu and Zhou, 2013]. این مدل به منظور کمینه‌کردن کل زمان تأخیر مسافری تحت محدودیت ظرفیت ارائه شده است. در مدل ارائه شده از داده‌های تقاضای سفر وابسته به زمان و مکان (مبدأ و مقصد) و جمع‌آوری شده توسط سامانه‌های خودکار اخذ کرایه، استفاده شده است. در نظر گرفتن محدودیت تعداد قطارها، واگن‌ها و زمان‌بندی تحت شرایط تقاضای مازاد، از جمله ویژگی‌های تحقیق مذکور است. برای حل مسئله از الگوریتم ژنتیک GA استفاده شده است. استراتژی کلی این است که زمان سرفاصله بین اعزام‌های متوالی قطارها مطابق با الگوی تقاضای سفر تنظیم شود تا زمان‌های انتظار مسافری حداقل گردد.

در تحقیقی از بین و همکاران (۲۰۱۴) یک مدل زنجیره مارکف برای حداقل‌سازی هزینه‌های تأخیر و مصرف انرژی در راه‌آهن شهری ارائه شده است. برای حل مسئله از روش هوش مصنوعی مبتنی بر یادگیری استفاده شده است. جمیلی و پورسیدآقایی (۲۰۱۵) یک رویکرد استوارسازی برای الگوهای توقف-عبور در خطوط راه‌آهن شهری تحت عدم قطعیت تقاضا پیشنهاد کرده‌اند. برای حل مدل پیشنهادی، دو الگوریتم فراابتکاری از جمله (۱) یک الگوریتم مبتنی بر تجزیه و (۲) یک الگوریتم بر اساس روش بازپخت شبیه‌سازی شده (SA^*) ارائه شده است. این رویکرد استوارسازی روی یکی از خطوط راه‌آهن شهری در ایران مورد مطالعه و تجزیه و تحلیل قرار گرفته است [Jamili and Aghaee, 2015]. ژو و همکاران (۲۰۱۶) یک مدل کنترلی ظرفیت-محور برای مدیریت جریان مسافری تحت تقاضای نامعین ارائه نموده‌اند. یک الگوریتم مبتنی بر شبیه‌سازی برای حل مسئله توسعه یافته است. برای افزایش سرعت محاسبات، از رویکرد تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) و الگوریتم ژنتیک (GA) استفاده شده است. مطالعه موردی از عملکرد الگوریتم پیشنهادی نشان می‌دهد که روش پیشنهادی برای کنترل جریان مسافر بر اساس محدودیت ظرفیت در سناریوهای مختلف تقاضا از کارایی لازم برخوردار است [Xu et al., 2016]. یانگ و همکاران (۲۰۱۶) یک مدل احتمالی برای بهینه‌سازی یکپارچه جدول زمانی حرکت قطارهای راه‌آهن شهری و پروفایل سرعت قطارها ارائه نموده است. در این مدل، وزن قطار به عنوان متغیر غیرقطعی در زمان سیر قطارها و زمان لازم برای افزایش و شتاب، نیروی کششی، نیروی ترمز نظر گرفته شده است. این مدل یکپارچه، جهت حداقل کردن مصرف انرژی، بکار گرفته شده است. در تحقیق مذکور یک مدل برنامه‌ریزی احتمالی دومرحله‌ای برای تعیین جداول زمانی حرکت و سرعت قطارها تدوین و فرموله شده است. برای حل مدل یک الگوریتم ژنتیک مبتنی بر شبیه‌سازی برای یافتن راه‌حل‌های نزدیک به بهینه طراحی شده است. آزمایش‌های محاسباتی بر اساس داده‌های عملیاتی از راه‌آهن شهری پکن، در ساعات اوج تقاضا انجام شده است. بر اساس نتایج بدست آمده، می‌توان کل مصرف انرژی کششی را در مقایسه با جدول زمانی فعلی و مشخصات سرعت در مدل قطعی بطور قابل ملاحظه‌ای کاهش داد [Yang et al., 2016a]. در تحقیقی از لی و همکاران (۲۰۱۶) یک مدل کنترلی استوار برای تنظیم جداول زمانی قطارهای راه‌آهن زیرزمینی با توجه به نامعینی جریان ورود مسافر ارائه شده است. هدف از طراحی این مدل، ارائه یک مدل پیش‌بینی کننده بازخوردی برای بهینه‌سازی تابع هزینه در سیستم راه‌آهن شهری با توجه به محدودیت‌های ایمنی در شرایط بروز اغتشاشات تصادفی است [Li et al., 2016].

جمیلی و همکاران (۱۳۹۴) یک مدل ریاضی برای محاسبه بافرهای زمانی با رویکرد فازی جهت جذب اختلالات در راه آهن درون شهری ارائه کرده اند. برای حل مسئله یک الگوریتم ابتکاری ارائه شده و با استفاده از نمونه مسایل تصادفی و یک مطالعه موردی در یکی از خطوط راه آهن درون شهری در ایران، مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج تحقیق نشان می دهد که استفاده از رویکرد تخصیص بافرهای زمانی می تواند باعث افزایش استواری برنامه حرکت قطارها و همچنین تخمین دقیقتر ناوگان مورد نیاز و تعداد خطوط پارکینگ خواهد شد. در تحقیقی از جمیلی و قریشی نژاد (۲۰۱۵) مدلی برای بازیابی برنامه عملیات قطار شهری در شرایط اختلال ارائه شده است. در این مدل دو معیار از جمله (۱) زمان کل سفر از مسافران و (۲) تقاضای برآورده نشده، در نظر گرفته شده است. به منظور محاسبه تقاضای پوشش داده نشده، روابط جدیدی ارائه شده است. در این مدل، الگوهای بهره برداری بر اساس شرایط اختلال تنظیم شده است. با توجه به نتایج مطالعه موردی کارایی روش پیشنهادی در راه آهن شهری کرج به اثبات رسیده است [Jamili and Nejad, 2015]. در تحقیقی از بین و همکاران (۲۰۱۶) از روش برنامه ریزی پویای تقریبی، برای زمان بندی مجدد حرکت قطارهای راه آهن استفاده شده است. در این تحقیق یک مدل برنامه ریزی احتمالی برای زمان بندی مجدد حرکت قطارهای راه آهن شهری ارائه شده است. در این مدل، صرفه جویی در مصرف انرژی قطارها، کاهش زمان تأخیر و زمان سفر مسافران، هزینه های عملیاتی و نیز تاخیرات قطارها به عنوان معیارهای بهینه سازی در نظر گرفته شده اند. فرض شده است که تقاضای مسافر بصورت غیرقطعی و وابسته به زمان است. به عبارتی نرخ ورود مسافران به ایستگاه یک فرایند پواسون ناهمگن با نرخ متغیر با زمان (بر اساس ماتریس تقاضای مبدا-مقصد) در نظر گرفته شده است. الگوریتم تقریبی پیشنهادی، توانسته است راه حل هایی با کیفیت بالا در یک زمان نسبتاً کوتاه به دست آورد [Yin et al., 2016].

جدول ۱. دسته بندی مدل های زمان بندی قطارهای راه آهن شهری مبتنی بر تقاضای سفر

زمان توقف	زمان ترافیک	رویکردهای حل	توابع هدف	زیرساخت مدل	مرجع
✓	D	V	الگوریتم شاخه و کران (B&B) و GA	بهره وری عملیاتی و زمان انتظار مسافران	[Albrecht, 2009]
✓	D	F	GA	هزینه زمان انتظار مسافران در ایستگاه و هزینه ازدحام مسافر در داخل قطار	[Niu and Zhang, 2012]
✓	D	F	GA	مجموع وزنی مدت زمان انتظار مسافران	[Niu and Zhou, 2013]
✓	S	V	SNOPT (GAMS)	مجموع زمان سفر و انتظار مسافران	[Wang et al. 2013]
✓	D	V	ε -constraints	مجموع متوسط زمان انتظار مسافران	[Canca et al. 2013]
✓	D	F	روش های ابتکاری	دو هدفه (زمان انتظار مسافران و اندازه ناوگان)	[Niu and Tian, 2013]
✓	S	V	روش بهینه سازی دوسطحی مبتنی بر الگوریتم (GA)	چند هدفه (انرژی، زمان های انتظار و حجم تقاضای پوشش داده نشده)	[Wang et al. 2014a]
×	D	V	الگوریتم شاخه و برش (B&C)	متوسط زمان انتظار به ازای هر مسافر	[Barrena et al. 2014a]
✓	D	F	نرم افزار CPLEX	متوسط زمان انتظار به ازای هر مسافر	[Sun et al. 2014a]
×	D	V	روش جستجوی همسایگی تطابقی	متوسط زمان انتظار به ازای هر مسافر	[Barrena et al. 2014b]
✓	S	V	روش بهینه سازی دوسطحی	مصرف انرژی و زمان های سفر	[Wang et al. 2014b]
×	S	V	روش تجزیه لاگرانژ	هزینه های عملیاتی قطارها و زمان های انتظار مسافران	[Sun et al., 2014b]
✓	D	F	برنامه ریزی احتمالی	متوسط ازدحام مسافر	[Hassannayebi et al., 2016]
✓	D	F	جستجوی همسایگی متغیر	متوسط زمان انتظار هر مسافر	[Hassannayebi et al., 2017]

مرجع	زیرساخت	مدل	توابع هدف	رویکردهای حل	زمان تفاضل تفاضل	نوع تفاضل
[Yin et al., 2017]	DL	MIP	مصرف انرژی و زمان های انتظار	برنامه ریزی پویا	V	D ✓
[Feng et al., 2017]	DL	MINLP	مصرف انرژی	شبیه سازی-بهینه سازی	F	D ✓
[Yang et al., 2017c]	DL	MINLP	مصرف انرژی و زمان سفر قطارها	الگوریتم ژنتیک	V	D ×
[Guo et al., 2017]	N	MINLP	زمان انتظار بین خطوط	الگوریتم ازدحام ذرات	F	S ×
[Yang et al., 2017a]	DL	MIP	مصرف انرژی	الگوریتم ژنتیک	V	S ×
[Zhao et al., 2017]	DL	MIP	مصرف انرژی	الگوریتم ژنتیک	V	S ×
[Canca and Zarzo, 2017]	DL	MINLP	مصرف انرژی	روش ابتکاری	V	S ✓
[Yang et al., 2017b]	DL	MINLP	مصرف انرژی و زمان انتظار	روش ابتکاری	V	D ×
تحقیق حاضر	DL	MIP	مجموع زمان انتظار مسافران	روش ابتکاری مبتنی بر آزادسازی لاگرانژ	V	D ✓

متغیر: V; ثابت: F; پویا: D; ایستا: S; شبکه: N; دوخطه: DL; تک خط: SL

جنبه‌های معرفی شده در بالا پیرامون ابعاد مهم بهینه‌سازی عملیات حمل‌ونقل ریلی شهری، بر اهمیت و ضرورت تحقیق در این حوزه دلالت دارد، بطوریکه پیاده‌سازی نتایج این تحقیق می‌تواند در جهت برآورده‌سازی اهداف میان‌مدت و بلندمدت برنامه‌ریزی راه‌آهن شهری در جذب بیشتر تقاضا در مقایسه با سایر سامانه‌های حمل‌ونقل عمومی تأثیر مهمی داشته باشد. به عبارتی دیگر، تصمیم‌گیری با در نظر گرفتن شرایط پویا و در نظر گرفتن اثرات این عوامل بر جریان مسافران می‌تواند موجب افزایش کارایی برنامه زمان‌بندی حرکت قطارها شده و تأثیر معناداری بر ارتقای عملکرد و بهره‌وری عملیات حمل‌ونقل راه‌آهن شهری داشته باشد. از طرفی، بررسی تحقیقات گذشته نیز این ضرورت را نشان داده و خلأهای تحقیقاتی شناسایی شده در این حوزه را پشتیبانی می‌کند.

۳. بیان مسئله و مدل‌سازی

در این بخش، مدل زمان‌بندی قطارها در یک مسیر دوخطه حمل‌ونقل ریلی شهری تحت محدودیت ظرفیت ارائه شده است. با استفاده از مفاهیم شبکه مکان-زمان، مسئله برنامه‌ریزی قطارها در یک مسیر دوخطه بصورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح صفر و یک فرموله شده است. در این مدل، کیفیت خدمات به مجموع مدت زمان انتظار مسافران در ایستگاه‌ها اشاره دارد و از طرفی هزینه عملیاتی به حداکثر تعداد اعزام‌های مجاز در طول دوره بهره‌برداری مرتبط است.

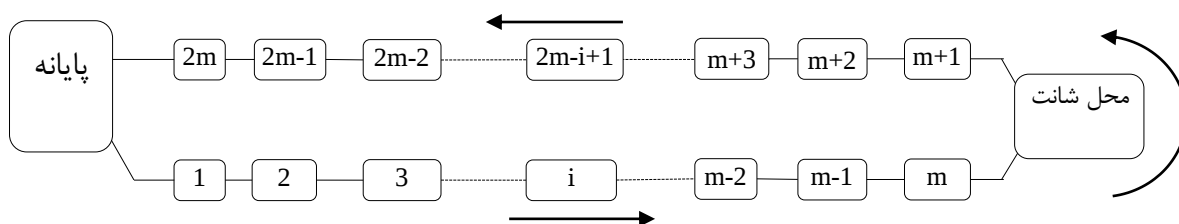
۳-۱ مفروضات

- به منظور تدوین مدل ریاضی مسئله، ابتدا مفروضات زیر در نظر گرفته می‌شود:
- زمان‌بندی قطارها در یک مسیر دوخطه در طول یک دوره بهره‌برداری روزانه و برای تعداد مشخصی قطار انجام می‌شود.
- تقاضای سفر در خطوط رفت و برگشت از مسیر دوخطه، مستقل از یکدیگر است.
- حداقل و حداکثر سرفاصله زمانی حرکت بین اعزام‌های متوالی در طول افق زمان‌بندی مشخص و ورودی مسئله است.
- اندازه ناوگان در طول افق برنامه‌ریزی ثابت است.
- ظرفیت قطار محدود است و در صورتی که مسافران قادر به سوار شدن به اولین قطار ورودی به ایستگاه نباشند، باید منتظر رسیدن قطارهای بعدی بمانند.

- مسافران منتظر در ایستگاه‌ها به ترتیب بر اساس زودترین زمان ورود به ایستگاه، سوار قطارها می‌شوند. این فرض در نحوه محاسبه مجموع زمان‌های انتظار مسافران تأثیرگذار است.
- زمان توقف قطارها در ایستگاه‌ها بین مقادیر حداقل و حداکثر متغیر است.
- سبقت بین قطارها مجاز نیست و هر ایستگاه تنها ظرفیت قبول و اعزام تنها یک قطار را دارد.
- محدودیت ظرفیت برای پارک قطارها در پایانه‌های انتهایی مسیر وجود ندارد.
- ماتریس تقاضای مبدا-مقصد و داده‌های جریان مسافری ورودی مدل زمان‌بندی حرکت قطارها است.
- فرض می‌شود که کل ظرفیت حمل قطارها، بزرگ‌تر یا مساوی با کل تقاضا مسافر است. آخرین قطار در تمام ایستگاه‌ها متوقف می‌شود و زمان حرکت آن از اولین ایستگاه برابر با T (انتهای افق برنامه‌ریزی) است. این فرض به این منظور است که اطمینان حاصل شود که در طول افق برنامه‌ریزی، تمام مسافران به ایستگاه‌های مقصد خود می‌رسند.
- هر قطار به اندازه حداکثر ظرفیت خود، برای جابجایی مسافران منتظر استفاده می‌کند.
- برآورد ظرفیت حمل مسافر هر قطار در هر ایستگاه، از کل تقاضای تجمعی مسافر در فاصله زمانی اعزام دو قطار متوالی، بزرگ‌تر است.
- قطاری که به پایانه می‌رسد، تمام مسافران داخل آن تخلیه شده و پس از حداقل زمان شانت آماده اعزام در جهت مخالف می‌شود. در صورتی که بیش از یک قطار در یک پایانه وجود داشته باشد، قطارها به ترتیب ورود به پایانه، از آن خارج می‌شوند.
- در مدل پیشنهادی، سرعت حرکت قطارها مقداری ثابت فرض شده است.

۲-۳ نمادگذاری

نمادهای مدل ریاضی (پارامترها و مجموعه‌ها) در جدول ۲ و نماد متغیرهای تصمیم در جدول ۳ آورده شده است. یک مسیر دوخطه ریلی، همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده، مفروض است. به غیر از پایانه‌ها، هر ایستگاه ظرفیت قبول و اعزام تنها یک قطار را دارد و در نتیجه هیچ سبقتی بین قطارها رخ نمی‌دهد. عملیات روزانه در راه‌آهن شهری توسط یک مرکز کنترل عملیات هماهنگ می‌شود. در ابتدای دوره بهره‌برداری، تمامی قطارها در پایانه مستقر هستند و در انتهای دوره برنامه‌ریزی نیز به پایانه بازمی‌گردند. یک سیکل حرکت نشان‌دهنده یک سفر رفت و برگشتی قطار است که از یک پایانه شروع می‌شود و به آن ختم می‌شود. یک قطار ممکن است چندین سیکل حرکت در عملیات روزانه در راه‌آهن شهری داشته باشد. پس از ورود یک قطار به پایانه، اندیس شمارش تعداد سیکل‌های حرکت این قطار، هنگامی که این قطار مجدداً از پایانه حرکت کند، یک واحد افزوده خواهد شد. به عنوان مثال، یک خط مترو که دارای n واحد قطار (اندازه ناوگان) است، برای هر واحد قطار مانند k ($1 \leq k \leq n$)، پس از اتمام سیکل اول و آماده‌شدن برای شروع سیکل اعزام بعدی، اندیس شماره اعزام قطار از k به $k+n$ تغییر می‌کند. با توجه به اینکه نرخ ورود مسافر و نسبت خروج مسافران، متغیر با زمان است، معادلات جریان مسافر باید با تصمیم‌گیری‌های مربوط به جداول زمانی حرکت قطارها مطابقت داشته باشد. متغیرهای تصمیم اصلی در مسئله تحقیق، تعیین زمان اعزام هر قطار از هر ایستگاه است به‌طوری‌که از ظرفیت موجود به بهترین نحو برای کمینه‌کردن زمان‌های انتظار مسافران روی ایستگاه‌ها استفاده شود.



شکل ۱. مسیر دوخطه راه‌آهن شهری

جدول ۲. نمادهای مدل ریاضی (اندیس پارامترها و مجموعه‌ها)

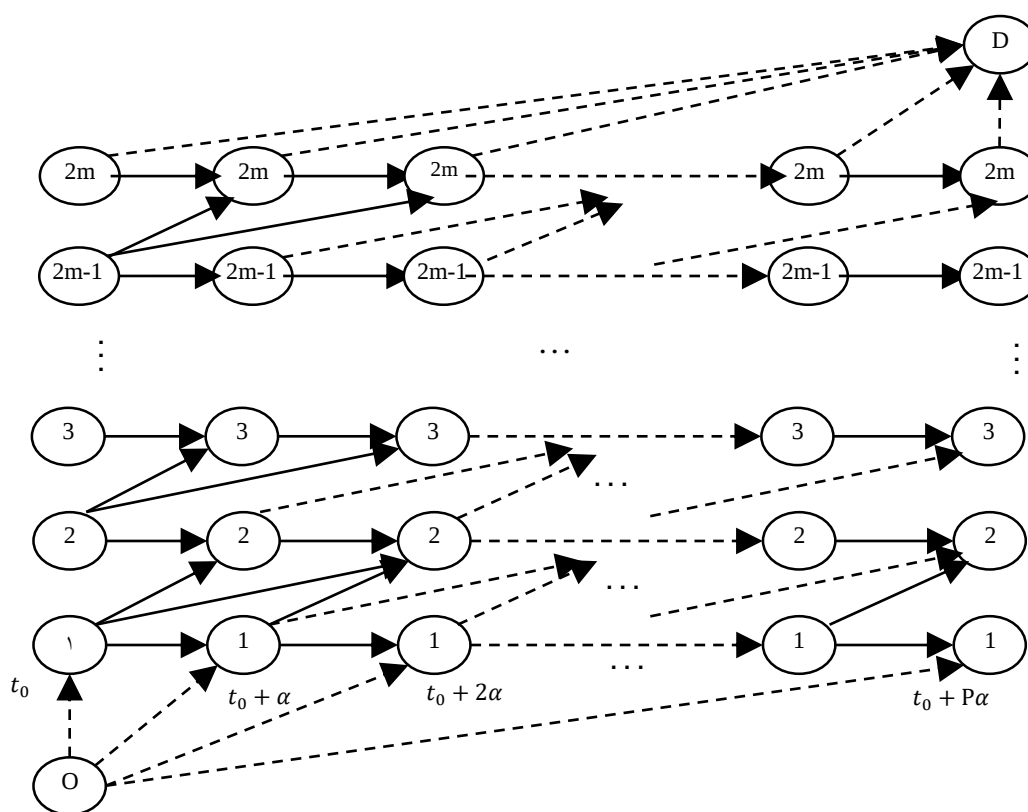
نماد	شرح
A	مجموعه کمان‌ها در شبکه مکان-زمان
S	مجموعه ارتباطات بین کمان‌ها
K	مجموعه قطارهای برنامه‌ریزی شده جهت اعزام
$I = \{1, 2, \dots, m, m+1, \dots, 2m\}$	مجموعه ایستگاه‌ها
$T = \{t_0, \dots, t_0 + P\alpha\}$	مجموعه نقاط زمانی در افق برنامه‌ریزی
k	اندیس قطار اعزامی ($k \in K$)
i, j	اندیس ایستگاه‌های مسیر $i, j \in I$
(i, j)	اندیس لینک‌های مستقیم بین ایستگاه‌ها $(i, j) \in S$
$t, t', \tilde{t}$	اندیس‌های زمانی
(i, i, t, t')	اندیس کمان‌های انتظار که مشخص‌کننده زمان توقف قطارها در ایستگاه i هستند ($t' = t + \alpha$)
(i, j, t, t')	اندیس کمان‌های حرکت واقعی قطارها شامل زمان ورود t و زمان خروج t' روی لینک (i, j) ، بطوریکه $(i, j, t, t') \in A$
(O, D)	گره‌های مجازی معرف ایستگاه مبدأ و مقصد
n	اندازه ناوگان
h_{min}	حداقل سرفاصله زمانی حرکت بین دو قطار
C_k	ظرفیت حمل مسافر برای قطار k ام
$[t_0, t_E]$	بازه زمان‌بندی حرکت قطارها
$p_{ij}(t)$	نرخ تقاضای سفر وابسته به زمان از ایستگاه i به ایستگاه j در طول بازه زمانی $[t - \alpha, t]$ بطوریکه $t \in T \setminus \{t_0\}$
B_i^{max}	حداکثر ظرفیت (سرعت) مجاز بارگیری مسافر در ایستگاه i (یک کران بالا برای تعداد مسافرینی سوار شده) بر حسب نفر بر دقیقه
$[s_i^{min}, s_i^{max}]$	بازه زمانی مجاز (حداقل و حداکثر زمان) توقف قطار در ایستگاه i
A_{it}	تعداد کل مسافران ورودی به ایستگاه i در زمان t

جدول ۳. نمادهای متغیرهای تصمیم مدل ریاضی

نماد	شرح
$x_{ijtt'}^k$	این متغیر به انتخاب کمان‌های شبکه زمان-مکان مربوط می‌شود، اگر قطار k از لینک (i, j) در بازه زمانی $[t, t']$ استفاده کند برابر با ۱ و در غیر این صورت برابر با صفر است.
b_{it}	تعداد مسافرین سوار شده در ایستگاه i در بازه $[t - \alpha, t]$ (یک متغیر عدد صحیح غیر منفی)
n_{it}	تعداد مسافرین منتظر در ایستگاه i و در زمان t (یک متغیر عدد صحیح غیر منفی)
e_{ij}^k	زمان ورود قطار k به لینک (i, j) بر اساس کمان انتخاب شده در شبکه زمان-مکان
d_{ij}^k	زمان خروج قطار k از لینک (i, j) بر اساس کمان انتخاب شده در شبکه زمان-مکان

در این تحقیق، سه نوع متغیر تصمیم در نظر گرفته شده است. به‌طور کلی، متغیر تصمیم $x_{ijtt'}^k$ برای تولید یک مسیر در شبکه مکان-زمان برای هر قطار مانند k تعریف شده است. اگر قطار k ام از ایستگاه i در زمان t حرکت کرده و در زمان t' به ایستگاه j برسد، این مقدار برابر با ۱ و در غیر این صورت صفر است. دو متغیر دیگر $(b_{it}$ و $n_{it})$ ، برای نمایش جریان مسافران و نیز تعداد مسافر منتظر در هر ایستگاه تعریف شده‌اند. این متغیرها می‌توانند به عنوان متغیرهای کنترل جریان مسافر در فرایند برنامه‌ریزی حرکت قطارها استفاده شوند. در واقع، این دو مجموعه از متغیرهای تصمیم، مرتبط با مقادیر متغیرهای زمان‌بندی حرکت $(x_{ijtt'}^k)$ در شبکه مکان-زمان هستند. متغیرهای کمکی e_{ij}^k و d_{ij}^k نیز نشان‌دهنده زمان خروج از ایستگاه i و زمان ورود به ایستگاه j برای قطار k است.

شبکه‌های مکان-زمان، با هدف یکپارچه‌سازی فیزیکی شبکه‌های حمل‌ونقل، با حرکت وابسته به زمان وسیله نقلیه، یکی از روش‌های مؤثر برای مدل‌سازی و تحلیل ویژگی‌های مکانی و زمانی سامانه‌های ترافیک پویا هستند [Yang et al., 2014]. به عنوان مثال، یانگ و ژو (۲۰۱۴) از مدل شبکه مکان-زمان برای نمایش وابستگی مکانی و زمانی در مسئله کوتاه‌ترین مسیر در یک شبکه با زمان سیر وابسته به زمان و تصادفی استفاده کرده‌اند [Yang and Zhou, 2014]. از آنجاکه یک برنامه زمانی حرکت قطار، موقعیت مکان-زمان قطار را تعیین می‌کند، می‌توان مسیر حرکت قطارهای راه‌آهن شهری را در یک شبکه مکان-زمان مطابق شکل ۲ نمایش داد. این شبکه دارای یک محور افقی است که نشان‌دهنده واحدهای زمانی گسسته در طول روز و یک محور عمودی که نشان داده موقعیت و ترتیب ایستگاه‌ها است. برای ساخت یک شبکه مکان-زمان، افق زمانی $[t_0, t_E]$ به یک مجموعه بازه با فواصل یکسان به طول α واحد زمان تقسیم می‌شوند. بطوریکه رویدادهای مربوط به زمان‌های ورود و خروج قطارها از ایستگاه‌ها توسط مجموعه‌ای از نقاط زمانی مشخص می‌شوند $T = \{t_0, t_0 + \alpha, t_0 + 2\alpha, \dots, t_0 + P\alpha\}$. از لحاظ تئوری، یک شبکه مکان-زمان ترکیبی از یک شبکه فیزیکی و افق زمانی است. همان‌طور که در شکل ۲ نشان داده شده است، هر گره فیزیکی در شبکه مکان-زمان نشان‌دهنده یک حالت مکانی و زمانی است و یک کمان مکان-زمان در اصل نشان‌دهنده ورود و خروج یک قطار است. هنگامی که افق زمانی مشخص باشد، به راحتی می‌توان مجموعه‌ای از گره‌ها را با توجه به مقدار α در کل شبکه مکان-زمان تعریف نمود. باین‌حال، در تعیین کمان‌های مکان-زمان، لازم است زمان سفر و نیز زمان توقف قطارها مشخص باشد. از کمان انتظار برای نمایش توقف قطار در ایستگاه استفاده می‌شود. هر کمان انتظار نشان می‌دهد که قطار در این ایستگاه برای مدت α توقف می‌کند.



شکل ۲. شبکه مکان-زمان

تقاضای پویای سفر در هر ایستگاه می‌تواند به کمک یک ماتریس مربعی متغیر با زمان $p(t)$ نمایش داده شود که تعداد سطر و ستون آن برابر با تعداد ایستگاه‌ها است. هر عنصر از این ماتریس با نماد $p_{ij}(t)$ نمایش داده شده است. بطور خاص، مقدار اولیه $p(t)$ (یا همان $p_{ij}(t_0)$)، برای هر مجموعه ایستگاه $i, j \in I$ برابر با صفر است. از آنجا که تقاضای سفر در خطوط رفت و برگشت مستقل است، مسافرینی که در یک خط سوار قطار می‌شوند، باید قبل از رسیدن قطار به پایانه، سوار قطار شوند. می‌توان نشان داد که مقدار تابع هدف (مجموع زمان‌های انتظار مسافرین در ایستگاه‌ها) در طول افق برنامه‌ریزی، به شکل خطی قابل بیان است:

$$Z = \sum_{i \in I} \sum_{t \in T \setminus \{t_0\}} \alpha \cdot n_{it} \quad (1)$$

بطوریکه داریم:

$$n_{it} = n_{i,t-1} + \sum_{j \leq 2m} p_{ij}(t) \cdot \alpha - b_{it} \quad \forall t \in T \setminus \{t_0\}, i \in I \quad (2)$$

مقدار اولیه n_{i,t_0} یک مقدار ثابت و مقدار b_{i,t_0} برابر با صفر است. بر اساس معادله بقاء جریان مسافرین در رابطه (۲)، تعداد مسافرین منتظر در زمان t برابر است با تعداد مسافرین انتظار در زمان $t - \alpha$ به علاوه مسافرین ورودی جدید و تفاضل آن از تعداد مسافرانی که در این فاصله زمانی سوار قطار می‌شوند. می‌توان در تابع هدف و روابط مدل ریاضی، متغیر n_{it} را حذف نمود و تنها از متغیر b_{it} برای مدل‌سازی جریان مسافرین استفاده نمود. در مدل‌سازی مسئله، حداکثر ظرفیت (سرعت) حمل مسافر B_i^{max} یک مقدار ثابت (در اینجا ۲۵۰ نفر بر دقیقه) در نظر گرفته شده است و به ظرفیت باقیمانده قطار و یا تعداد مسافرین منتظر بستگی ندارد. خواننده برای شرح بیشتر می‌تواند به وانگ و همکاران (۲۰۱۴) مراجعه کند [Wang et al., 2014b]. تابع هدف زمان انتظار مسافرین که قبلاً در معادله (۱) بیان شد، قابل جایگزین شدن با رابطه زیر است:

$$Z = \sum_{i \in I} \sum_{t \in T \setminus \{t_0\}} \alpha \cdot (n_{i,t_0} + \sum_{t' \in [t_0, t]} (A_{it'} - b_{it'})) \quad (3)$$

بطوریکه محدودیت زیر برقرار باشد:

$$\sum_{t' \in [t_0, t]} b_{it'} \leq n_{i,t_0} + \sum_{t' \in [t_0, t]} A_{it'}, \quad \forall t \in T, i \in I \quad (4)$$

در اینجا منظور از $[t_0, t]$ ، مجموعه $\{t_0, t_0 + \alpha, t_0 + 2\alpha, \dots, t\}$ است. برای اثبات به دنبال رابطه‌ای بین متغیرهای تصمیم n_{it} و b_{it} حذف متغیر n_{it} از سیستم معادلات هستیم. ابتدا، تعداد کل مسافرین ورودی به ایستگاه i در زمان t را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_{it} = \sum_{j \leq 2m} p_{ij}(t) \cdot \alpha \quad \forall t \in T, i \in I \quad (5)$$

در رابطه بالا، A_{it} نشان‌دهنده تعداد کل مسافرین ورودی به ایستگاه i در زمان t با مقاصد مختلف $j \leq 2m$ است. باید توجه داشت که معادله (۲) برای هر $i \in I$ و $t \in T \setminus \{t_0\}$ برقرار است. در نتیجه با جمع دنباله‌ای از معادلات داریم:

$$n_{it} = n_{i,t_0} + \sum_{t' \in (t_0, t]} (A_{it'} - b_{it'}), \quad t \in T \setminus \{t_0\}, i \in I \quad (6)$$

با توجه به اینکه مقادیر n_{i,t_0} و b_{i,t_0} برابر با صفراند، با ساده‌سازی معادله بالا داریم:

$$n_{it} = n_{i,t_0} + \sum_{t' \in [t_0, t]} (A_{it'} - b_{it'}) \quad t \in T, i \in I \quad (7)$$

در نتیجه، متغیر تصمیم n_{it} عملاً یک متغیر تصمیم کمکی است که بر اساس مقدار متغیر b_{it} قابل استنتاج است. حال با توجه به اینکه متغیر n_{it} غیرمنفی ($n_{it} \geq 0$) است، محدودیت زیر برای متغیر b_{it} برقرار است:

$$\sum_{t' \in [t_0, t]} b_{it'} \leq n_{i,t_0} + \sum_{t' \in [t_0, t]} A_{it'} \quad t \in T, i \in I \quad (8)$$

□

در نتیجه با قرار دادن رابطه (۶) در معادله (۱)، قضیه ۱ اثبات می‌شود.

۳-۵ مدل ریاضی

مدل زمان‌بندی قطارها در مسیرهای دوخطه راه‌آهن شهری با فرض تقاضای وابسته به زمان، یک مدل خطی بوده و متغیرهای اصلی آن زمان اعزام قطارها از ایستگاه‌ها است.

$$[MIP]: \min_{\mathbf{x}, \mathbf{b}} \sum_{i \in I} \sum_{t \in T \setminus \{t_0\}} \alpha \cdot (n_{i,t_0} + \sum_{t' \in [t_0, t]} (A_{it'} - b_{it'})) \quad (9)$$

s. t.

$$\sum_{(i,j,t,t') \in A} x_{ijtt'}^k - \sum_{(j,i,t',t) \in A} x_{jitt'}^k = \begin{cases} 1 & i = O, t = t_0 \\ -1 & i = D, t = t_0 + P\alpha, \forall k \in K \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \quad (10)$$

$$d_{0,1}^{k+n} - e_{2m,D}^k \geq t_k^{shunt}, \quad \forall k, k+n \in K \quad (11)$$

$$d_{m,m+1}^k - e_{m,m+1}^k = t_k^{turn} \quad k \in K \quad (12)$$

$$e_{ij}^k - e_{ij}^{k-1} \geq h_{min} \quad \forall (i,j) \in S, k \in K \setminus \{1\} \quad (13)$$

$$d_{ij}^k - d_{ij}^{k-1} \geq h_{min} \quad \forall (i,j) \in S, k \in K \setminus \{1\} \quad (14)$$

$$s_i^{min} \leq e_{ij}^k - d_{j',i}^k \leq s_i^{max} \quad \forall (i,j) \in S, (j',i) \in S, k \in K \quad (15)$$

$$e_{ij}^k = \sum_{(i,j,t,t') \in A} t \cdot x_{ijtt'}^k \quad \forall (i,j) \in S, k \in K \quad (16)$$

$$d_{ij}^k = \sum_{(i,j,t,t') \in A} t' \cdot x_{ijtt'}^k \quad \forall (i,j) \in S, k \in K \quad (17)$$

$$b_{it} \leq \sum_{k \in K} x_{iit'}^k \cdot B_i^{max} \quad \forall i \in I, t \in T \setminus \{t_0\}, t' = t-1 \quad (18)$$

$$\sum_{t' \in [t_0,t]} b_{i,t'} \leq n_{i,t_0} + \sum_{t' \in [t_0,t]} A_{i,t'} \quad t \in T, i \in I \quad (19)$$

$$\sum_{i' \in [1,i]} \sum_{t \in T} [\sum_{j>i}^{2m} \alpha \cdot p_{i'j}(t+1) \sum_{\tilde{t} \in [t_0,t]} \sum_{t' \in T} (x_{i',i'+1,\tilde{t},t'}^{k-1} - x_{i',i'+1,\tilde{t},t'}^k)] \leq C_k, \quad \forall i \in I, k \in K \setminus \{1\} \quad (20)$$

$$x_{ijtt'}^k \in \{0,1\}, \quad \forall (i,j,t,t') \in A, k \in K \quad (21)$$

$$b_{it} \in \mathbb{N}^+, t \in T, i \in I \quad (22)$$

رابطه (۱۰) محدودیت تعادلی جریان در شبکه زمان-مکان است که تضمین می‌کند برای هر قطار در شبکه مکان-زمان، یک مسیر شدنی حرکت وجود دارد. این محدودیت برای جلوگیری از تشکیل شدن سیکل در گراف حرکت قطارها در شبکه مکان-زمان بیان شده است. برای شرح بیشتر به تحقیقی از یانگ و ژو (۲۰۱۴) مراجعه شود. به منظور نمایش مسیرهای آغازین و پایانی، از گره‌های فرضی (ساختگی) مبدأ (O_{t_0}) و مقصد ($D_{t_0+P\alpha}$) استفاده شده است. علاوه بر این، جهت نمایش ارتباط بین گره مجازی مبدأ و گره حقیقی مبدأ، به تعداد $P+1$ کمان اضافی ($O, 1, t_0, t_0 + P\alpha$) تعریف می‌شود ($0 \leq p \leq P$) که در آن‌ها زمان سیر لینک‌ها مجازی است. در فرآیند زمان‌بندی، اگر کمان ($O, 1, t_0, t_0 + P\alpha$) توسط یک قطار انتخاب شود، این موضوع نشان می‌دهد که زمان واقعی رسیدن این قطار به ایستگاه ۱ برابر با $t_0 + P\alpha$ است. به همین ترتیب، $P+1$ کمان اضافی برای نمایش ارتباط بین گره حقیقی مقصد و گره مجازی مقصد (با لینک زمان سفر مجازی) تعریف می‌شود. این کمان‌ها با نماد ($2m, D, t_0 + P\alpha, t_0 + P\alpha$) نمایش داده می‌شود بطوریکه داریم $0 \leq p \leq P$. بطور مشابه، اگر کمان ($2m, D, t_0 + P\alpha, t_0 + P\alpha$) توسط یک قطار انتخاب شود، نشان می‌دهد که زمان واقعی اعزام این قطار از ایستگاه $2m$ برابر است با $t_0 + P\alpha$. محدودیت (۱۱) حداقل زمان گردش قطار k در پایانه (t_k^{shunt}) جهت انجام سیکل بعدی اعزام را نشان می‌دهد. محدودیت (۱۲) زمان چرخش قطار k در ایستگاه m (t_k^{turn}) را تعیین می‌کند. محدودیت‌های (۱۳) و (۱۴) به حداقل سرفاصله زمانی حرکت قطارها در ورود و اعزام از یک کمان مشترک مانند (i, j) اشاره دارد. محدودیت (۱۵) به حدود بالا و پایین برای زمان توقف قطارها در ایستگاه‌ها اشاره دارد. محدودیت‌های (۱۶) و (۱۷) زمان ورود و اعزام قطار k به کمان (i, j) را در شبکه زمان-مکان مشخص می‌کند. محدودیت (۱۸) ارتباط بین متغیرهای تصمیم x و b را تعریف می‌کند. اگر قطاری در زمان t در ایستگاه i توقف نداشته باشد، آنگاه تعداد مسافرینی که سوار قطار می‌شوند برابر با صفر است. در غیراینصورت، یک کران بالا برای تعداد مسافرین سوار شده به قطار در نظر گرفته شده است. محدودیت (۱۹)، تعداد مسافران سوار شده به قطار در یک بازه زمانی را با توجه به حداکثر ظرفیت حمل نشان می‌دهد. به‌طور خاص، اگر یک قطار $k \in K$ در فاصله زمانی $[t - \alpha, t]$ در ایستگاه i توقف کند، داریم $0 \leq b_{it} \leq B_i^{max}$ ؛ در غیر این صورت $b_{it} = 0$ ، زیرا هیچ قطاری در ایستگاه i در این فاصله زمانی توقف ندارد و در نتیجه هیچ مسافری نمی‌تواند سوار قطار شود. محدودیت (۲۰) بر اساس قضیه ۱ حاصل شده است. این رابطه بیان می‌کند که تعداد کل مسافرین منتظر در هر زمان، مقداری غیرمنفی است. محدودیت (۲۱) ظرفیت قطار را بیان می‌کند. این رابطه تضمین می‌کند که تعداد کل تقاضای سفر در یک ایستگاه، بیشتر از ظرفیت قابل حمل قطار نیست. مقدار $\sum_{\tilde{t} \in [t_0,t]} \sum_{t' \in T} (x_{i',i'+1,\tilde{t},t'}^{k-1} - x_{i',i'+1,\tilde{t},t'}^k)$ فقط زمانی برابر با ۱ است که قطار $k-1$ از ایستگاه i' در زمان t یا قبل از آن

اعزام شود، درحالی که قطار k اعزام نشده باشد. در غیراینصورت برابر با 0 است. این رابطه به طور خاص برای نمایش دوره زمانی بین اعزام قطارهای $k-1$ و k از ایستگاه i' در نظر گرفته شده است. عبارت $\sum_{j>i}^m \alpha \cdot p_{i',j}(t + \alpha)$ تعداد کل تقاضای مسافر در بازه $[t, t + \alpha]$ با مبدأ $i' < i$ و مقصد $j > i$ را نشان می دهد.

۶-۳ پیچیدگی محاسباتی

کاپرارا و همکاران (۲۰۰۶) نشان داده اند که مسئله زمان بندی حرکت قطارها در رده مسایل NP-complete قرار دارد [Caprara et al., 2006]. محققین نشان دادند که با ساده سازی و حذف برخی از محدودیت های مسئله، می توان مدل زمان بندی حرکت قطارها در شبکه مکان-زمان را به یک مسئله طراحی شبکه خدمات با زمان پیوسته، تبدیل نمود. در نتیجه با توجه به پیچیدگی محاسباتی مسئله طراحی شبکه که توسط جانسون و همکاران به اثبات رسیده است [Johnson, Lenstra and Kan, 1978] مسئله تحقیق نیز در رده مسائل NP-complete است. علاوه براین، تعداد متغیرهای صفر و یک X برابر با $|I| \cdot |T| \cdot |K|$ است. پیچیدگی مدل وابسته به مقیاس فیزیکی مسیر دوخطه (تعداد ایستگاه ها)، تعداد فواصل زمانی و تعداد قطارهای اعزامی است. در مسائل با ابعاد واقعی، مدل دارای تعداد بسیار زیادی متغیر صفر و یک است و حل مستقیم آن به کمک نرم افزاری های بهینه سازی ممکن نیست. با توجه به پیچیدگی های مسئله، یک الگوریتم ابتکاری مبتنی بر آزادسازی لاگرانژ و تجزیه آن به زیرمسایل ارائه شده است. به کمک الگوریتم آزادسازی لاگرانژ امکان تولید کران پایین برای مسئله و نیز بهبود کران بالا با هدف کاهش فاصله بهینگی فراهم می شود. در مدل پیشنهادی، یک دسته محدودیت از نوع وابسته (ارتباطی) مربوط به رابطه (۱۸) است. آزادسازی این محدودیت، امکان تجزیه مسئله اصلی را به دو زیرمسئله فراهم می کند.

جدول ۴. تعداد متغیرها و محدودیت در مدل

متغیر یا محدودیت	تعداد
متغیر صفر و یک X	$ I \cdot T \cdot K $
متغیر عدد صحیح b	$ T \cdot I $
محدودیت تعادل جریان	$(T \cdot I + 2) \cdot K $
محدودیت گردش ناوگان	$2 K - n$
محدودیت های سرفاصله زمانی	$2(K - 1) \cdot A $
محدودیت های زمان توقف در ایستگاه	$2 I \cdot K $
محدودیت های مسافرگیری	$2 I \cdot T $
محدودیت ظرفیت قطار	$ I \cdot K $

۴. الگوریتم حل ابتکاری مبتنی بر آزادسازی لاگرانژ

برای حل مدل برنامه ریزی عدد صحیح پیشنهادی در ابعاد بزرگ، از الگوریتم آزادسازی لاگرانژ استفاده شده است. بخش های مهم در الگوریتم آزادسازی لاگرانژ شامل موارد زیر است [Zhang et al., 2010]:

- انتخاب محدودیت یا دسته محدودیت های مناسب جهت آزادسازی
- ارائه روشی برای تولید جواب های شدنی یا ترمیم جواب های غیرموجه تولید شده
- نحوه به روز رسانی ضرایب لاگرانژ

موفقیت الگوریتم آزادسازی لاگرانژ بسته به نوع مسئله و پیچیدگی محاسباتی زیرمسایل مربوطه، بسیار متفاوت است [Han, Guan, and Shi, 2011]. در مسائل مختلف بهینه سازی با توجه به ساختار محدودیت ها، امکان آزادسازی محدودیت های مختلفی از مسئله

وجود دارد. بطورکلی، آزادسازی انواع مختلفی از محدودیت‌ها تأثیر متفاوتی بر عملکرد الگوریتم زیرگرایان دارد [Mao et al., 2014].
چند توصیه مفید در این زمینه عبارت‌اند از: [Martin, 1999]

- حل زیرمسایل حاصل از آزادسازی محدودیت‌ها باید به اندازه کافی در مقایسه با مسئله اصلی در زمانی بسیار کوتاه‌تر میسر باشد.
 - آزادسازی محدودیت‌ها باید به یک کران پایین قوی منجر شود.
 - با آزادسازی محدودیت‌ها می‌بایست قادر به تولید جواب‌های نزدیک به یک جواب شدنی بود.
- الگوریتم ابتکاری پیشنهادی، مبتنی بر آزادسازی لاگرانژ برای پیدا کردن یک راه‌حل خوب در زمان معقول است. مدل آزادسازی شده به دو زیرمسئله تجزیه می‌شود که هر کدام قابل حل در زمان معقول هستند. همچنین یک الگوریتم ابتکاری برای تبدیل جواب‌های غیرموجه تولید شده به جواب شدنی و به‌روزرسانی کران بالا برای تابع هدف مدل اصلی، ارائه شده است. در مدل پیشنهادی، رابطه (۱۸) شامل مجموعه‌ای از محدودیت‌های سخت است که ارتباط بین متغیرهای x و b را برقرار می‌کند. که به طور جدی سرعت محاسباتی را تحت تأثیر قرار می‌دهد. اگر این محدودیت آزادسازی شود، مدل اولیه را می‌توان به دو مسئله جداگانه تجزیه نمود که پیچیدگی هر کدام قابل بررسی است. ضرایب لاگرانژ مربوط به این محدودیت با نماد $U := \{u_{it} \geq 0, \forall i \in I, t \in T \setminus \{t_0\}\}$ نمایش داده می‌شود. مسئله آزادسازی شده بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z_{LR}(u) := \min_{x,b} \left\{ \sum_{i \in I} \sum_{t \in T \setminus \{t_0\}} [\alpha \cdot (n_{i,t_0} + \sum_{t' \in [t_0,t]} (A_{i,t'} - b_{i,t'})) + u_{it} \cdot b_{it}] - \sum_{i \in I} \sum_{t \in T \setminus \{t_0\}} u_{it} \sum_{k \in K} x_{ijtt'}^k \cdot B_i^{max} \right\}$$

$s. t.$

محدودیت‌های (۱۰) الی (۱۷)، (۱۹) الی (۲۲).

با توجه به اینکه در مدل بالا هیچ ارتباطی بین متغیرهای x و متغیر b وجود ندارد، لذا می‌توان مسئله را به دو زیر مسئله نسبتاً آسان تجزیه نمود.

- زیر مسئله (۱)، تنها شامل متغیرهای صفر و یک $x_{ijtt'}^k$ است.
 - زیر مسئله (۲)، نیز تنها از متغیرهای عدد صحیح b_{it} تشکیل شده و قابل تجزیه به تعدادی زیرمسئله است.
- زیرمسئله ۱: اولین زیرمسئله، یک مدل برنامه ریزی عدد صحیح و تنها شامل متغیرهای صفر و یک x بصورت زیر است:

$$[SP_1]: \Gamma(u) := \max_x \left\{ \sum_{i \in I} \sum_{t \in T \setminus \{t_0\}} u_{it} \sum_{k \in K} x_{ijtt'}^k \cdot B_i^{max} \right\}$$

$s. t.$

محدودیت‌های (۱۰) الی (۱۷)، (۲۰) و (۲۱).

زیرمسئله (۱) مربوط به یک مسئله برنامه‌ریزی قطارها در شبکه مکان-زمان و بدون در نظر گرفتن جریان مسافر است، که در آن هیچ عملیات سبقت و نیز تلاقی بین قطارها رخ نمی‌دهد. بدون این دو دسته محدودیت، نرم‌افزار CPLEX می‌تواند زیرمسئله (۱) را بسیار آسان‌تر و سریع‌تر نسبت به مدل اولیه حل کند.
زیر مسئله دوم را می‌توان به شرح زیر بیان نمود:

$$[SP_2]: \phi(u) := \min_b \sum_{i \in I} \sum_{t \in T \setminus \{t_0\}} \alpha \cdot (n_{i,t_0} + \sum_{t' \in [t_0,t]} (A_{i,t'} - b_{i,t'})) + \sum_{i \in I} \sum_{t \in T \setminus \{t_0\}} u_{it} \cdot b_{it}$$

$s. t.$

$$\sum_{t' \in [t_0,t]} b_{i,t'} \leq n_{i,t_0} + \sum_{t' \in [t_0,t]} A_{i,t'}, \quad t \in T, i \in I$$

$$b_{it} \in N^+, \quad t \in T, i \in I$$

در اینجا، محدودیت‌های مدل $[SP_2]$ اساساً روابط جریان تجمعی ورود مسافر هستند که در معادله (۶) تعریف شده‌اند. علاوه بر این، زیرمجموعه‌ای از محدودیت‌ها به مدل اضافه شده است که تضمین می‌کند تعداد مسافران سوار شده در هر فاصله زمانی و ایستگاه بر اساس محدودیت ظرفیت حمل، کنترل شده است. به‌طور معمول، مشابه این محدودیت‌ها نیز برای مدل اولیه برقرار است:

$$b_{it} \leq B_i^{max} \quad \forall i \in I, t \in T \quad (23)$$

مدل $[SP_2]$ متشکل از $2m$ زیرمسئله کوچک $\phi_i(u)$ برای هر ایستگاه $i = 1, 2, \dots, 2m$ بصورت زیر قابل تعریف است.

$$[SP_2(i)] : \phi_i(u) := \min_b \sum_{t \in T \setminus \{t_0\}} \alpha \cdot (n_{i,t_0} + \sum_{t' \in [t_0, t]} (A_{i,t'} - b_{i,t'})) + \sum_{t \in T \setminus \{t_0\}} u_{it} \cdot b_{it}$$

$$\begin{aligned} s.t. \\ \sum_{t' \in [t_0, t]} b_{i,t'} &\leq n_{i,t_0} + \sum_{t' \in [t_0, t]} A_{i,t'}, \quad t \in T \\ b_{it} &\leq B_i^{max} \quad t \in T \\ b_{it} &\in \mathbb{N}^+, \quad t \in T \end{aligned}$$

این مدل تنها شامل متغیرهای عدد صحیح b_{it} است. از آنجاکه مقیاس زیرمسئله $\phi_i(u)$ بسیار کوچک تر از مسئله اصلی است، حل آن بسیار ساده تر است. از لحاظ تئوری، با حل مسئله $\Gamma(u)$ و یک سری از زیرمسائل $\phi_i(u)$ با ضرایب معلوم لاگرانژ u ، می توانیم یک کران پایین برای این مسئله اصلی بدست آوریم. سپس، قوی ترین کران پایین را می توان با حل دوگان لاگرانژی زیر بدست آورد.

$$\max_{u \geq 0} Z_{LR}(u) := \Gamma(u) + \phi(u) \quad (24)$$

برای هر مجموعه از ضرایب لاگرانژ، اگر بتوان جواب بهینه زیرمسائل (۱) و (۲) را بدست آورد، می توان، یک کران پایین برای مسئله اصلی تولید نمود. همچنین با تبدیل جواب های غیرموجه به جواب های موجه در هر تکرار از الگوریتم، امکان کاهش فاصله بهینگی فراهم می شود.

۱-۴ الگوریتم تولید کران بالا

برای به دست آوردن یک راه حل شدنی، یک روش ابتکاری ارائه شده است. اگر راه حل بهینه بدست آمده با حل زیرمسئله اول $[SP_1]$ و زیرمسائل $[SP_2(i)]$ یک راه حل شدنی برای مسئله اولیه باشد، آنگاه یک کران بالا برای مقدار بهینه تابع هدف مسئله اصلی بدست می آید. در غیر این صورت، یک روش ابتکاری مبتنی بر راه حل های زیرمسائل تجزیه شده، برای ترمیم جواب غیرموجه و به منظور به روزرسانی کران بالا در فرایند حل مسئله ارائه شده است. فرض کنید مقادیر $\bar{x} = \{\bar{x}_{ijt}^k\}$ و $\bar{b} = \{\bar{b}_{it}\}$ مقادیر بهینه برای متغیرهای مسئله آزادسازی شده باشد. از آنجا که تنها محدودیت (۱۸) آزادسازی شده اند، کافی است بررسی شود که آیا جواب های $\bar{x}$ و $\bar{b}$ محدودیت آزادسازی شده را ارضاء می کنند یا خیر. عبارتی آیا رابطه زیر برقرار است یا خیر.

$$b_{it} \leq \sum_{k \in K} x_{iit'}^k \cdot B_i^{max} \quad \forall i \in I, t \in T \setminus \{t_0\}, t' = t - 1 \quad (25)$$

دو حالت مختلف برای فرآیند مسافری در نظر می گیرد. در مورد اول، هیچ قطاری در ایستگاه i و در زمان t توقف نداشته است. و عبارتی داریم $\sum_{k \in K} x_{iit'}^k = 0$. در نتیجه این محدودیت تضمین می کند که تعداد مسافر سوار شده در این ایستگاه باید برابر با ۰ باشد. در مورد دوم، یک قطار در ایستگاه i و در زمان t توقف دارد $\sum_{k \in K} x_{iit'}^k = 1$. در این حالت، تعداد مسافران سوار شده به قطار در این فاصله زمانی، یک مقدار نامنفی است که باید کمتر یا مساوی تعداد مسافران منتظر فعلی و نیز حداکثر ظرفیت حمل B_i^{max} باشد. سوار شدن مسافر تنها در زمان های توقف قطار مجاز است. با توجه به محدودیت سرفاصله زمانی قطارها، حداکثر یک قطار می تواند در هر لحظه در یک دوره زمانی مشخص در یک ایستگاه توقف داشته باشد که عبارتی داریم $\sum_{k \in K} x_{iit'}^k \leq 1$. بنابراین، می توان با استفاده از جواب $\bar{x}$ در هر ایستگاه i ، یک مجموعه راه حل شدنی $\hat{b} = \{\hat{b}_{it}\}$ از آغاز دوره زمانی $t_0 + \alpha$ تا زمان $t_0 + P\alpha$ بدست آورد. باید توجه نمود که مقادیر اولیه b_{i,t_0} و A_{i,t_0} برابر با صفر و نیز یک مقدار ثابت است. برای مثال، در اولین بازه زمانی $[t_0, t_0 + \alpha]$ ، می توان مقدار $\sum_{k \in K} \bar{x}_{i,t_0,t_0+\alpha}^k$ را محاسبه کرده تا تعیین نمود آیا قطاری در ایستگاه i توقف دارد یا خیر. اگر قطاری در ایستگاه توقف نداشته باشد، قرار می دهیم $\hat{b}_{i,t_0+\alpha} = 0$ و در غیر این صورت، $\hat{b}_{i,t_0+\alpha} = \min\{B_i^{max}, n_{i,t_0} + A_{i,t_0+\alpha}\}$. این شرایط نشان می دهد که اگر تعداد مسافران سوار شده بزرگ تر از ظرفیت قابل حمل باشد، آنگاه فقط به تعداد B_i^{max} مسافر می تواند در این دوره زمانی سوار قطار شود. در غیر این صورت، تعداد مسافری منتظر در t_0 (n_{i,t_0}) و نیز تعداد مسافری جدید ورودی ($A_{i,t_0+\alpha}$) می توانند سوار قطار شوند. در دوره زمانی دوم، می توان محاسبات مشابهی انجام داد. اگر هیچ قطاری در حال توقف نباشد، داریم $\hat{b}_{i,t_0+2\alpha} = 0$ در غیر این صورت:

$$\hat{b}_{i,t_0+2\alpha} = \min\{B_i^{max}, n_{i,t_0} + A_{i,t_0+\alpha} + A_{i,t_0+2\alpha} - \hat{b}_{i,t_0+\alpha}\} \quad (26)$$

۱	دریافت مقادیر $\bar{b}$ و $\bar{p}_t$ و نیز ماتریس نرخ ورود مسافر وابسته به زمان p_t به عنوان ورودی
۲	اگر مقادیر $\bar{b}$ و $\bar{p}_t$ محدودیت (۱۸) صدق می کنند به گام ۴ رفته و در غیراینصورت به گام ۳ بروید.
۳	به ازای تمام ایستگاه ها $i = 1, 2, \dots, 2m$ عملیات زیر را انجام دهید:
۳-۱	به ازای تمام نقاط زمانی $t = t_0, t_0 + \alpha, \dots, t_0 + P\alpha$ شروط زیر بررسی شود:
۳-۲	اگر $t = t_0$ قرار دهید: $\hat{b}_{it} = 0$ در غیراینصورت اگر $\sum_{k \in K} \bar{x}_{iit'}^k = 0$ قرار دهید: $\hat{b}_{it} = 0$ در غیراینصورت اگر $t = t_0 + \alpha$ و $\sum_{k \in K} \bar{x}_{iit'}^k = 1$ مقدار $\hat{b}_{it}$ را بصورت زیر محاسبه کنید: $\hat{b}_{it} = \min\{B_i^{max}, n_{i,t_0} + \sum_{j=i}^{2m} \alpha \cdot p_{ij}(t_0 + \alpha)\}$ در غیراینصورت اگر $t \neq t_0 + \alpha$ و $\sum_{k \in K} \bar{x}_{iit'}^k = 1$ مقدار $\hat{b}_{it}$ را بصورت زیر محاسبه کنید: $\hat{b}_{it} = \min\{B_i^{max}, n_{i,t_0} + \sum_{t'=t_0+\alpha}^t \sum_{j=i}^{2m} \alpha \cdot p_{ij}(t') - \sum_{t'=t_0}^{t-\alpha} \hat{b}_{it'}\}$
۴	مقادیر شدنی متغیر $\hat{b}_{it}$ و نیز مقدار تابع هدف مدل اصلی را به عنوان خروجی بازگردانید.

این محاسبات و تخصیص مقدار $\hat{b}_{it}$ تا انتهای دوره زمانی $t_0 + P\alpha$ ادامه می یابد. واضح است که راه حل بدست آمده $\hat{b}$ در تمام محدودیت های (۱۸)، (۱۹) و (۲۲) مربوط به مسئله اولیه صدق می کند. گام های الگوریتم ابتکاری به طور خلاصه در جدول زیر آمده است:

۲-۴ الگوریتم زیرگرادیان

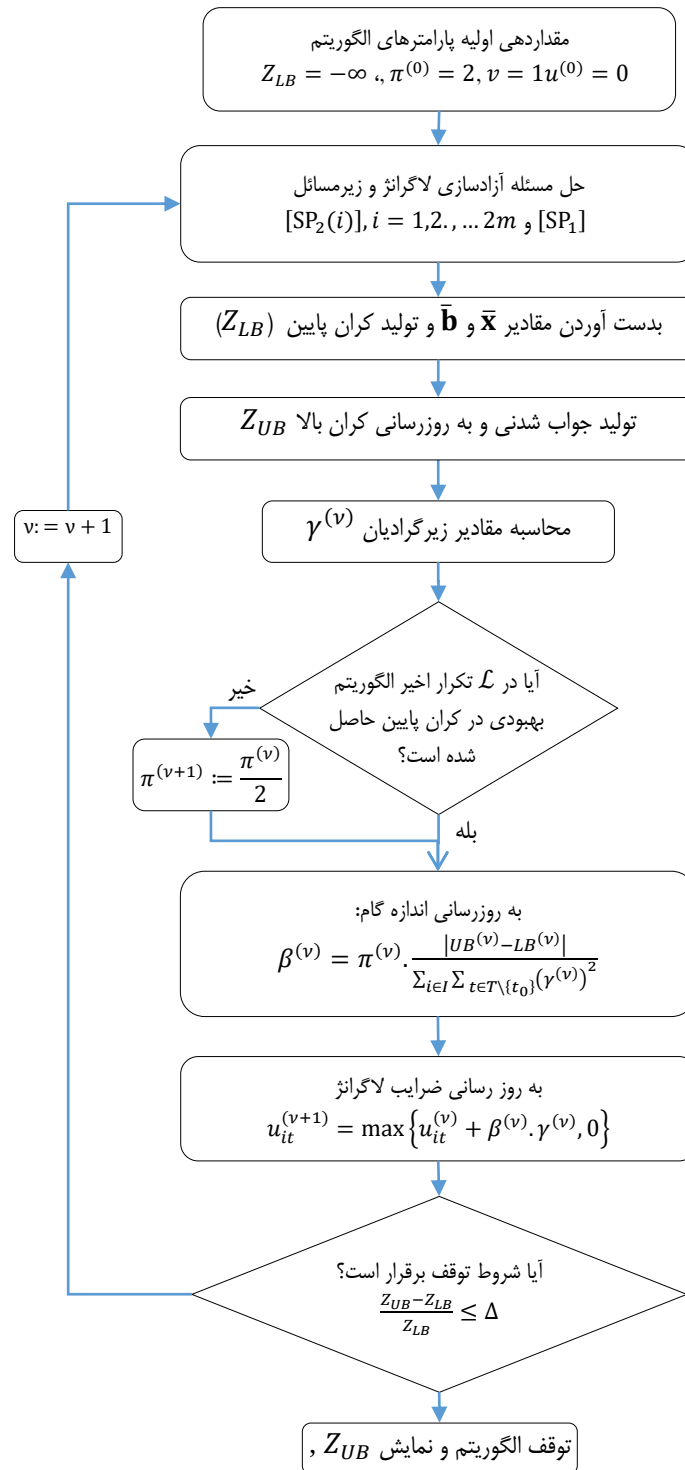
جهت تعیین ضرایب لاگرانژ روش ها و تکنیک های مختلف در تحقیقات وجود دارد. از جمله پرکاربردترین این روش ها، تکنیک زیرگرادیان^۴ است. از نظر تئوری ثابت شده است که بکارگیری این روش در تکرارهای بالا می تواند به همگرایی الگوریتم به سمت جواب بهینه منجر شود [Goffin, 1977]. مطابق توضیحات و نمادگذاری ارائه شده، گام های روش آزادسازی لاگرانژ و الگوریتم زیرگرادیان پیشنهادی در شکل ۳ آورده شده است. مقدار اولیه ضرایب لاگرانژ $\{u_{it}^{(v=0)}\}$ برابر با صفر در نظر گرفته می شوند. ضرایب لاگرانژ در تکرار v ام از روی ضرایب لاگرانژ در تکرار قبلی و بصورت زیر محاسبه می شود:

$$u_{it}^{(v+1)} = \max\{u_{it}^{(v)} + \beta^{(v)} (\bar{b}_{it}^{(v)} - \sum_{k \in K} \bar{x}_{iit'}^k \cdot B_i^{max}), 0\}, \quad \forall i \in I, t \in T \setminus \{t_0\} \quad (27)$$

در معادله بالا منظور از $\bar{b}_{it}^{(v)}$ و $\bar{x}_{iit'}^k$ مقادیر جواب های بهینه مدل های آزادسازی شده در تکرار v ام و مقدار $\beta^{(v)}$ نیز اندازه گام در الگوریتم زیرگرادیان است. علاوه بر این، عبارت $\bar{b}_{it}^{(v)} - \sum_{k \in K} \bar{x}_{iit'}^k \cdot B_i^{max}$ مقدار زیرگرادیان در تکرار v ام $(\gamma^{(v)})$ است. اندازه گام در تکرار v ام از الگوریتم زیرگرادیان، بصورت زیر محاسبه می شود:

$$\beta^{(v)} = \pi^{(v)} \cdot \frac{|UB^{(v)} - LB^{(v)}|}{\sum_{i \in I} \sum_{t \in T \setminus \{t_0\}} (\gamma^{(v)})^2} \quad (28)$$

در رابطه (۲۸)، منظور از $UB^{(v)}$ و $LB^{(v)}$ بهترین کران های بالا و پایین تابع هدف بدست آمده تا تکرار v ام و $\pi^{(v)}$ ضریب مقیاس است که در طول اجرای الگوریتم به روزرسانی می شود. این پارامتر در بازه $[0, 2]$ تعریف شده و اگر در $\mathcal{L}$ تکرار متوالی از الگوریتم بهبودی در کران پایین (Z_{LB}) حاصل نشود، مقدار آن برای تکرار بعدی نصف خواهد شد ($\pi^{(v+1)} := \frac{\pi^{(v)}}{2}$). شرط توقف الگوریتم حداکثر زمان اجرای الگوریتم (t_{lim}) و یا رسیدن به فاصله بهینگی مطلوب (Δ) است.



شکل ۳. گام‌های الگوریتم ابتکاری مبتنی بر آزادسازی لاگرانژ برای حل مسئله زمان‌بندی قطارهای راه‌آهن شهری

۵. نتایج الگوریتم آزادسازی لاگرانژ

در این بخش، نتایج مدل زمان‌بندی اولیه قطارها ارائه می‌شود. اطلاعات نمونه مسائل واقعی از خطوط راه‌آهن شهری تهران و حومه استخراج شده است. نقشه خطوط فعلی شبکه راه‌آهن شهری تهران و حومه متشکل از ۵ خط اصلی است (

اطلاعات زمان سنجی بین ایستگاه‌ها در خطوط مختلف در

نقشه‌ی خطوط راه‌آهن شهری تهران و حومه - مترو
Tehran Urban & Suburban Railway (Metro) Map



شکل ۵. نقشه خطوط شبکه راه‌آهن شهری تهران و حومه

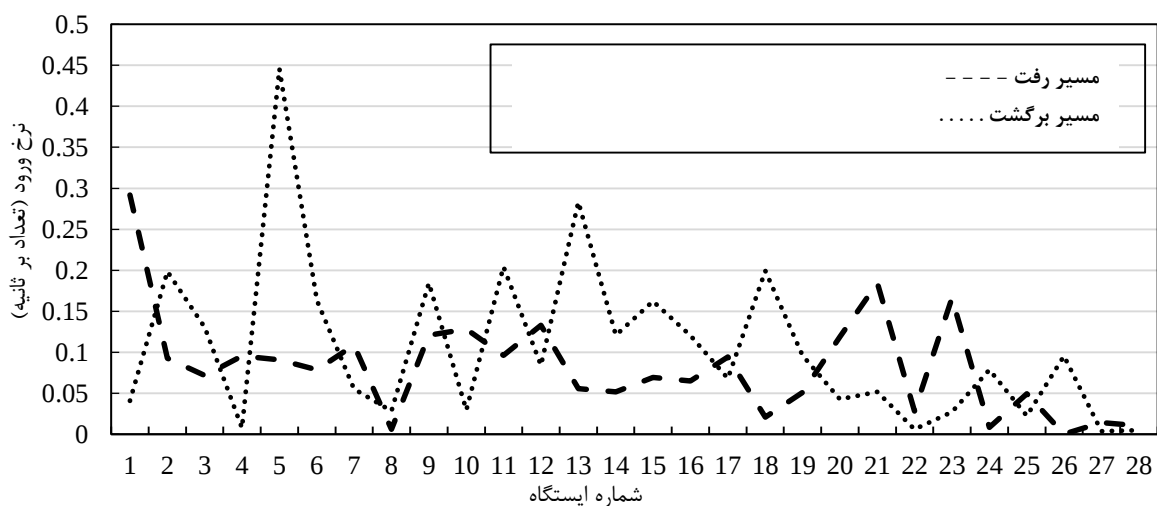
جدول ۶. زمان سیر بین ایستگاه‌های مختلف در خطوط راه‌آهن شهری تهران (ثانیه)

ایستگاه	خط																
	مسیر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	74	63	96	94	96	79	67	65	73	52	67	70	64	57	86	286
	1	137	77	173	339	122	158	90	82	65	55	84	90	158	122	339	173
2	2	87	104	76	110	74	76	70	62	52	59	67	78	106	71	68	57
	1	134	108	69	134	108	69	134	108	69	134	108	69	134	108	69	134
5	2	280	273	322	266	458	335	317	246	137	183	137	246	317	335	458	266
	1	183	137	246	317	335	458	266	137	183	280	273	322	266	458	335	317

خلاصه شده است. اطلاعات مربوط به تقاضای سفر و جریان حرکت مسافرین از جمله نرخ ورود مسافر و نسبت خروج مسافر از قطارها در ایستگاه‌های مختلف خطوط ۲ و ۵ به ترتیب در شکل ۶ و شکل ۷ آمده است. نرخ ورود مسافر در هر مسیر مستقل از مسیر دیگر فرض شده و پراکندگی تغییرات آن در ایستگاه مختلف از مسیر قابل ملاحظه است. به عنوان مثال، داده‌های ورودی نرخ ورود مسافر در ایستگاه‌های مختلف خط ۱ در شکل ۴ نمایش داده شده است.

جدول ۵. اطلاعات خطوط شبکه راه‌آهن شهری تهران

شماره خط	m	n	h_{min} (ثانیه)	C (تعداد مسافر)	s_{min} (ثانیه)	s_{max} (ثانیه)	t_{min} (ثانیه)
۱	۲۸	۲۹	۲۷۰	۲۲۳۰	۱۵	۳۰	۱۲۰
۲	۲۱	۴۸	۲۴۰	۲۲۳۰	۱۵	۳۰	۱۵۰
۵	۱۱	۲۰	۴۲۰	۲۵۰۰	۳۰	۶۰	۶۰۰



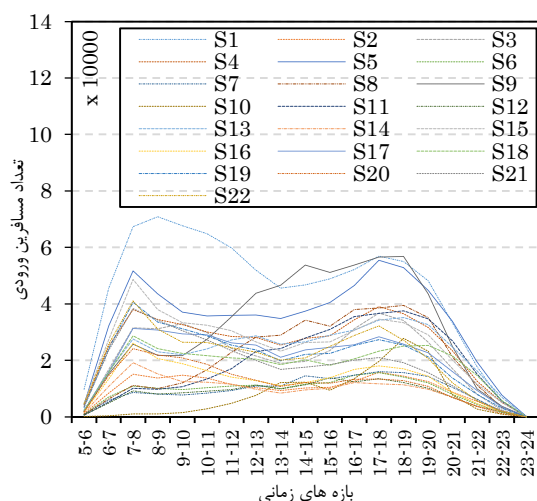
شکل ۴. تغییرات نرخ ورود در ایستگاه‌های مختلف خط ۱



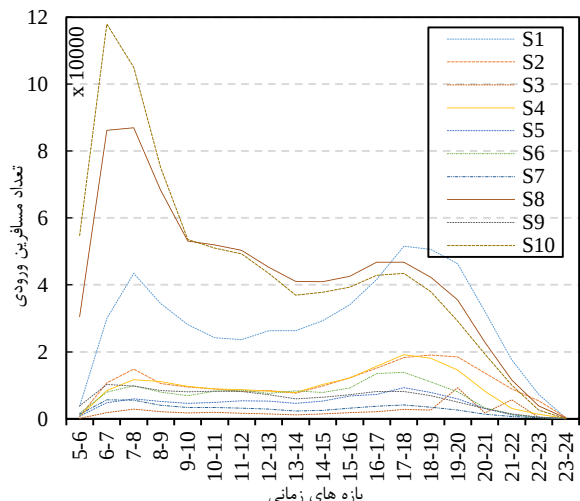
شکل ۵. نقشه خطوط شبکه راه‌آهن شهری تهران و حومه

جدول ۶. زمان سیر بین ایستگاه‌های مختلف در خطوط راه‌آهن شهری تهران (ثانیه)

	خط	ایستگاه																				
		مسیر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	74	63	96	94	96	79	67	65	73	52	67	70	67	64	45	28	62	86	58	82	158
	1	137	77	173	339	122	158	96	94	96	79	67	65	73	52	67	70	62	86	58	82	158
2	2	87	104	76	110	74	76	70	62	59	57	68	71	106	98	78	78	66	69	108	134	-
	1	134	108	69	66	78	78	66	69	108	134	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	2	280	273	322	266	335	458	317	335	246	137	246	137	246	137	246	137	246	137	246	137	-
	1	183	273	322	266	335	458	317	335	246	137	246	137	246	137	246	137	246	137	246	137	-



شکل ۶. نرخ ورود مسافری به ایستگاه‌های خط ۲



شکل ۷. نرخ ورود مسافری به ایستگاه‌های خط ۵

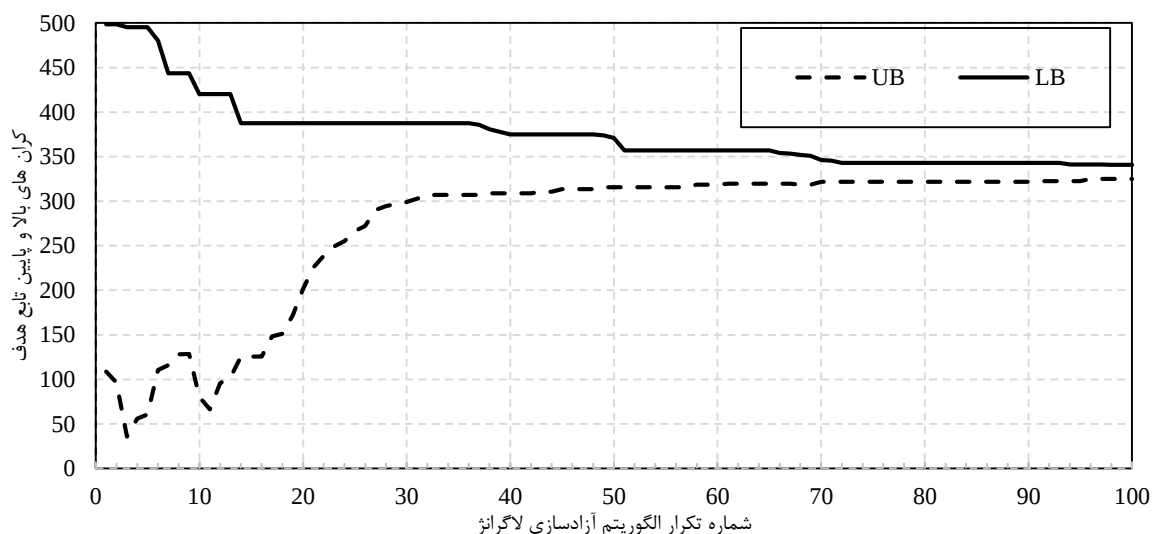
برای حل مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح از برنامه CPLEX استفاده شده است. در الگوریتم ابتکاری مبتنی بر آزادسازی لاگرانژ، تنظیمات مربوط به الگوریتم زیرگردان به شرح زیر است: حداکثر زمان اجرای الگوریتم (t_{lim}) برابر با ۱۲ ساعت، و فاصله بهینگی مطلوب (Δ) ۵٪ است. چنانچه در $L = 2$ تکرار متوالی، تغییری در کران پایین (Z_{LB}) رخ ندهد، ضریب مقیاس ($\pi^{(v)}$) در تکرار بعدی نصف خواهد شد. برای ارزیابی روش پیشنهادی، در مجموع ۱۵ مسئله حل شده است. نمونه مسائل مختلف بر اساس ابعاد مسئله و الگوهای مختلف تقاضای سفر متمایز شده‌اند. مهم‌ترین معیار ارزیابی کارایی الگوریتم آزادسازی لاگرانژ، معیار دوگان است که اختلاف بین کران‌های بالا و پایین بدست آمده برای جواب‌های مسئله (که معمولاً غیرموجه هستند) را محاسبه می‌کند. یک شاخص دیگر، ارزیابی کیفیت جواب‌های شدنی (کران بالا) است که در الگوریتم آزادسازی بدست آمده‌اند. نتایج حل مسائل نمونه با روش ابتکاری مبتنی بر آزادسازی لاگرانژ در جدول ۷ خلاصه شده است. ارزیابی الگوریتم آزادسازی لاگرانژ بر اساس معیارهای کیفیت جواب و زمان حل انجام شده است. کران بالا و پایین تابع هدف (مجموع زمان‌های انتظار مسافری روی سکوها) بر حسب ساعت داده شده‌اند. در کلیه نمونه مسائلی که برنامه CPLEX قادر به یافتن یک جواب شدنی بوده است، نرم‌افزار برای مدت ۱۲ ساعت اجرا شده است. همان‌طور که نتایج نشان می‌دهد، کلیه نمونه مسائل مربوط به خط ۵ راه‌آهن شهری (مسائل ۱ الی ۵) توسط روش ابتکاری مبتنی بر آزادسازی لاگرانژ قابل حل بوده‌اند. متوسط زمان محاسباتی این نمونه مسائل برابر با ۴٫۴ ساعت است. علاوه بر این، متوسط میزان بهبود کیفیت جواب‌های حاصل از الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با برنامه CPLEX برابر با ۱۳٫۴٪ است. این میزان بهبود، کارایی محاسباتی الگوریتم ابتکاری مبتنی بر آزادسازی لاگرانژ را برای حل مسئله نشان می‌دهد.

جدول ۷. نتایج روش ابتکاری مبتنی بر آزادسازی لاگرانژ

کد نمونه مسئله	آزادسازی لاگرانژ						نرم‌افزار CPLEX	
	کران بالا (UB)	کران پایین (LB)	فاصله بهینگی	زمان حل (ساعت)	کران بالا (UB)	کران پایین (LB)	فاصله بهینگی	
5-50-22-360	340.9	325.1	4.85%	2.32	375.2	320.1	17.20%	
5-60-22-360	318.4	310.4	2.59%	2.97	352.0	269.6	30.56%	
5-70-22-360	297.2	284.1	4.60%	4.87	351.5	236.7	48.54%	
5-80-22-360	259.8	248.9	4.38%	5.48	326.2	226.6	43.94%	
5-90-22-360	173.6	165.3	5.00%	6.15	210.0	140.5	49.48%	
2-160-42-360	280.2	246.1	13.85%	12h	317.9	209.1	52.06%	
2-170-42-360	263.6	238.3	10.60%	12h	274.9	152.2	80.63%	
2-180-42-360	243.2	200.0	21.63%	12h	231.1	122.9	88.02%	
2-190-42-360	237.8	178.0	33.62%	12h	263.6	149.9	75.88%	
2-200-42-360	198.4	169.8	16.83%	12h	*NA	106.4	NA	
1-140-56-300	229.7	222.1	3.44%	7.05	307.2	162.9	88.52%	
1-150-56-300	200.9	174.8	14.96%	12h	283.6	148.9	90.46%	
1-160-56-300	179.8	130.3	37.96%	12h	NA	107.0	NA	
1-170-56-300	155.1	130.5	18.86%	12h	NA	103.7	NA	
1-180-56-300	126.4	97.1	30.20%	12h	NA	43.6	NA	

* جواب شدنی در مدت ۱۲ ساعت بدست نیامده است

بر اساس نتایج بدست آمده، برنامه CPLEX قادر به یافتن جواب شدنی برای برخی از نمونه مسائل مربوط به خطوط ۱ و ۲ نبوده است، درحالی که الگوریتم ابتکاری مبتنی بر آزادسازی لاگرانژ توانسته است جواب‌های نزدیک به بهینه را در مدت زمان معقولی بدست آورد. متوسط فاصله بهینگی حاصل از الگوریتم ابتکاری مبتنی بر آزادسازی لاگرانژ در کلیه نمونه مسائل، برابر با ۱۴٫۸٪ است. نمودار همگرایی کران بالا و پایین در تکرارهای الگوریتم آزادسازی لاگرانژ برای نمونه مسئله (۱)، در شکل ۸ نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش تعداد تکرارهای الگوریتم زیرگرایان، فاصله بهینگی، از طریق بهبود هم‌زمان کران‌های بالا و پایین، به سمت صفر نزدیک شده است.



شکل ۸. همگرایی کران بالا و پایین در تکرارهای الگوریتم آزادسازی لاگرانژ (در نمونه مسئله 5-50-22-360)

۶. نتیجه‌گیری و تحقیقات آتی

امروزه، راه‌آهن شهری نقش کلیدی در حمل‌ونقل عمومی شهرهای بزرگ ایفا می‌کند چراکه این نوع سیستم حمل‌ونقل در مقایسه با سایر شیوه‌های متداول حمل‌ونقل همگانی دارای ظرفیت حمل‌ونقل و راندمان بالا در ارائه خدمات به حجم قابل‌توجهی از مسافری است. برنامه‌ریزی حمل‌ونقل ریلی درون‌شهری و به خصوص برنامه‌ریزی حرکت قطارها در خطوط راه‌آهن شهری زیرزمینی بصورت روزانه و با توجه به ظرفیت حمل‌ونقل و برای پاسخ به تغییرات تقاضای مسافری انجام می‌شود. راه‌آهن شهری امروزه با مشکل تقاضای روزافزون سفر شهری و رقابت با سایر سامانه‌های حمل‌ونقل نیز مواجه است. به منظور غلبه بر این چالش‌ها، مدیریت قطار شهری باید به تلاش برای استفاده هرچه بهتر از برنامه‌ها و منابع خود جهت ارائه بهترین خدمت به مسافری بپردازد.

تحقیق حاضر بر چگونگی به حداقل رساندن مجموع مدت زمان انتظار مسافری در ایستگاه‌ها از طریق تنظیم جدول زمانی قطارها متمرکز گردید. این مسئله بهینه‌سازی در قالب مدل برنامه‌ریزی عددصالح خطی مبتنی بر شبکه مکان-زمان فرموله شد. برای حل مسئله، یک الگوریتم ابتکاری مبتنی بر روش آزادسازی لاگرانژ ارائه شد. نتایج نشان داده است که با آزادسازی محدودیت گردش ناوگان و تجزیه مسئله اصلی به زیرمسائل زمان‌بندی در تک ایستگاه، اختلاف کران پایین و بالای حاصل از الگوریتم آزادسازی لاگرانژ کمتر از سایر روش‌ها بوده و زمان حل زیرمسائل نیز به مراتب کمتر از سایر رویکردهای آزادسازی لاگرانژ است. الگوریتم ابتکاری مبتنی بر آزادسازی لاگرانژ توانسته است جواب‌های نزدیک به بهینه را در مدت زمان معقولی بدست آورد.

به عنوان تحقیقات آتی می‌توان زمینه‌های مختلفی را در توسعه مدل اولیه مدنظر قرار داد. تقاضای سفر دارای ماهیت پویا و تصادفی است. با استفاده از اطلاعات تاریخی تقاضای سفر که در سامانه‌های جمع‌آوری خودکار اطلاعات مسافری ثبت می‌شود، تغییرات تصادفی نرخ ورود مسافری در قالب سناریوها یا توابع توزیع احتمال، قابل بیان است. در نتیجه، می‌توان استواری برنامه اولیه حرکت قطارها را در

برابر تغییرات تصادفی تقاضا و تحت محدودیت ظرفیت قطار، افزایش داد. همچنین کاهش و یا افزایش سرفاصله زمانی می‌تواند در درازمدت به تغییر قابل توجهی در تقاضای سفر منجر شود. در تحقیقات آینده می‌توان به مدل‌سازی مسئله، در شرایط وابستگی تقاضا به زمان‌بندی اولیه پرداخت.

۷. پی‌نوشت‌ها

1. Timetable Synchronization Problem
2. Branch and cut
3. Simulated annealing
4. sub-gradient

۸. مراجع

جمیلی، امین؛ قنادپور، سید فرید؛ قرشی نژاد، سید محمدرضا (۱۳۹۴) "محاسبه بافرهای زمانی با رویکرد فازی جهت جذب اختلالات در یک سیستم راه آهن درون شهری به همراه یک مطالعه موردی". نشریه فصلنامه مهندسی حمل و نقل، دوره ۶، شماره ۴، صفحه ۵۵۱-۵۶۲

Albrecht, T., (2009) "Automated timetable design for demand-oriented service on suburban railways", Public Transport, Vol. 1, No. 1, pp. 5-20.

Amin-Naseri, M.R. and Baradaran, V. (2014) " Accurate estimation of average waiting time in public transportation systems. Transportation Science", Vol. 49, No. 2, pp. 213-222.

Barrena, E., Canca, D., Coelho, L.C., Laporte, G., (2014a) "Exact formulations and algorithm for the train timetabling problem with dynamic demand", Computers & Operations Research, Vol. 44, pp. 66-74.

Barrena, E., Canca, D., Coelho, L.C., Laporte, G., (2014b) "Single-line rail rapid transit timetabling under dynamic passenger demand", Transportation Research Part B: Methodological, Vol. 70, pp. 134-150.

Barrena, E., Canca, D., Coelho, L.C. and Laporte, G., (2014) "Exact formulations and algorithm for the train timetabling problem with dynamic demand" Computers & Operations Research, Vol. 44, pp.66-74.

Beirão, G., Cabral, J.S., (2007) "Understanding attitudes towards public transport and private car: A qualitative study", Transport policy, Vol. 14, No. 6, pp. 478-489.

Canca, D., Barrena, E., Algaba, E. and Zarzo, A., (2014) "Design and analysis of demand-adapted railway timetables", Journal of Advanced Transportation, Vol. 48. No. 2, pp.119-137.

Canca, D., Barrena, E., Laporte, G. and Ortega, F.A., (2016) "A short-turning policy for the management of demand disruptions in rapid transit systems", Annals of Operations Research, Vo. 246, No. 1-2, pp.145-166.

Canca, D., Zarzo, A., (2017) "Design of energy-Efficient timetables in two-way railway rapid transit lines", Transportation Research Part B: Methodological, Vol. 102, pp. 142-161.

- Caprara, A., Monaci, M., Toth, P., Guida, P.L., (2006) "A Lagrangian heuristic algorithm for a real-world train timetabling problem", *Discrete applied mathematics*, Vol. 154, No. 5, pp. 738-753.
- Feng, J., Li, X., Liu, H., Gao, X., Mao, B., (2017) "Optimizing the Energy-Efficient Metro Train Timetable and Control Strategy in Off-Peak Hours with Uncertain Passenger Demands", *Energies*, Vol. 10, No. 4, pp. 436.
- Goffin, J., (1977) "On convergence rates of subgradient optimization methods", *Mathematical Programming*, Vol. 13, No. 1, pp. 329-347.
- Guo, X., Sun, H., Wu, J., Jin, J., Zhou, J., Gao, Z., (2017) "Multiperiod-based timetable optimization for metro transit networks", *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 96, pp. 46-67.
- Han, Y., Guan, X., Shi, L., (2011) "Optimization based method for supply location selection and routing in large-scale emergency material delivery", *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, Vol. 8, No. 4, 683-693.
- Hassannayebi, E., Zegordi, S.H., Amin-Naseri, M.R., Yaghini, M., (2017) "Optimizing headways for urban rail transit services using adaptive particle swarm algorithms" *Public Transport*, pp. 1-40.
- Hassannayebi, E., Zegordi, S.H., Amin-Naseri, M.R., Yaghini, M., (2016) "Demand-oriented timetable design for urban rail transit under stochastic demand", *Journal of Industrial and Systems Engineering*, Vol. 9, No. 3, pp. 28-56.
- Hassannayebi, E., Zegordi, S.H., Yaghini, M., Amin-Naseri, M.R., (2017) "Timetable optimization models and methods for minimizing passenger waiting time at public transit terminals", *Transportation Planning and Technology*, Vol. 40, No. 3, pp. 278-304.
- Jamili, A., Aghaee, M.P., (2015) "Robust stop-skipping patterns in urban railway operations under traffic alteration situation", *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Vol. 61, pp. 63-74.
- Jamili, A., Nejad, M.G., (2015) "Urban Railway Operation Recovery During Disruption", 2015 IEEE 18th International Conference on Intelligent Transportation Systems. IEEE, pp. 2825-2830.
- Johnson, D.S., Lenstra, J.K., Kan, A., (1978) "The complexity of the network design problem", *Networks*, Vol. 8, pp. 279-285.
- Kabasakal, A., Kutlar, A., Sarikaya, M., (2013) "Efficiency determinations of the worldwide railway companies via DEA and contributions of the outputs to the efficiency and TFP by panel regression", *Central European Journal of Operations Research*, Vol. 23, No. 1, pp. 69-88.
- Kang, L., Zhu, X., Wu, J., Sun, H., Siriya, S. and Kanokvate, T., (2014) "Departure time optimization of last trains in subway networks: mean-variance model and GSA algorithm", *Journal of Computing in Civil Engineering*, Vol. 29, No. 6, pp. 04014081.
- Li, S., De Schutter, B., Yang, L., Gao, Z., (2016) "Robust model predictive control for train regulation in underground railway transportation", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 24, No. 3, pp. 1075-1083.
- Mao, K., Pan, Q.-K., Pang, X., Chai, T., (2014) "An effective Lagrangian relaxation approach for rescheduling a steelmaking-continuous casting process", *Control Engineering Practice*, Vol. 30, 67-77.

- Martin, R.K., (1999) "Large Scale Linear and Integer Optimization: A Unified Approach: A Unified Approach", Springer Science & Business Media.
- Niu, H., Tian, X., (2013) "An Approach to Optimize the Departure Times of Transit Vehicles with Strict Capacity Constraints. Mathematical Problems in Engineering, vol. 2013, Article ID 471928, 9 pages.
- Niu, H., Zhang, M., (2012) "An Optimization to Schedule Train Operations with Phase-Regular Framework for Intercity Rail Lines" Discrete Dynamics in Nature and Society, vol. 2012, Article ID 549374, 13 pages.
- Niu, H., Zhou, X., (2013) "Optimizing urban rail timetable under time-dependent demand and oversaturated conditions", Transportation Research Part C: Emerging Technologies Vol. 36, pp. 212-230.
- Shafahi, Y., Khani, A., (2010) "A practical model for transfer optimization in a transit network: Model formulations and solutions", Transportation Research Part A: Policy and Practice, Vol. 44, No. 6, pp. 377-389.
- Sun, L., Jin, J.G., Lee, D.-H., Axhausen, K.W., Erath, A., (2014a) "Demand-driven timetable design for metro services", Transportation Research Part C: Emerging Technologies, Vol. 46, pp. 284-299.
- Sun, X., Zhang, S., Dong, H., Chen, Y., Zhu, H., (2014b) "Optimization of Metro Train Schedules With a Dwell Time Model Using the Lagrangian Duality Theory", Intelligent IEEE Transactions on Transportation Systems, Vol. 16, No. 3, pp. 1-9.
- Visentini, M.S., Borenstein, D., Li, J.Q. and Mirchandani, P.B., (2014) "Review of real-time vehicle schedule recovery methods in transportation services", Journal of Scheduling, Vol. 17, No. 6, pp.541-567.
- Wang, Y., De Schutter, B., Delft, C., van den Boom, T., Ning, B., Tang, T., (2014a) "Origin-Destination Dependent Train Scheduling Problem with Stop-Skipping for Urban Rail Transit Systems", Transportation Research Board 93rd Annual Meeting.
- Wang, Y., De Schutter, B., van den Boom, T., Ning, B., Tang, T., (2013) "Real-time scheduling for single lines in urban rail transit systems, Intelligent Rail Transportation (ICIRT), IEEE International Conference, pp. 1-6.
- Wang, Y., De Schutter, B., van den Boom, T.J., Ning, B., Tang, T., (2014b) "Efficient bilevel approach for urban rail transit operation with stop-skipping", IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, Vol. 15, No. 6, pp. 2658-2670.
- Wang, Y., Liao, Z., Tang, T., Ning, B., (2017) "Train scheduling and circulation planning in urban rail transit lines", Control Engineering Practice, Vol. 61, 112-123.
- Welding, P., (1957) "The instability of a close-interval service", OR, Vol. 8, No. 3, pp. 133-142.
- Wheat, P., Wardman, M., (2017) "Effects of timetable related service quality on rail demand", Transportation Research Part A: Policy and Practice, Vol. 95, pp. 96-108.
- Wong, R.C., Yuen, T.W., Fung, K.W., Leung, J.M., (2008) "Optimizing timetable synchronization for rail mass transit", Transportation Science, Vol. 42, No. 1, pp. 57-69.

- Xu, X.-y., Liu, J., Li, H.-y., Jiang, M., (2016) "Capacity-oriented passenger flow control under uncertain demand: Algorithm development and real-world case study", *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, Vol. 87, pp. 130-148.
- Yang, H., Li, X., Yang, X., (2017a) "Mean-variance model for optimization of the timetable in urban rail transit systems", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 0954409717706301.
- Yang, L., Zhou, X., (2014) "Constraint reformulation and a Lagrangian relaxation-based solution algorithm for a least expected time path problem", *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 59, pp. 22-44.
- Yang, L., Zhou, X., Gao, Z., (2014) "Credibility-based rescheduling model in a double-track railway network: a fuzzy reliable optimization approach", *Omega*, Vol. 48, pp. 75-93.
- Yang, S., Wu, J., Sun, H., Yang, X., Gao, Z., Chen, A., (2017b) "Bi-objective nonlinear programming with minimum energy consumption and passenger waiting time for metro systems, based on the real-world smart-card data", *Transportmetrica B: Transport Dynamics*, Vol. 4, No. 2, pp. 1-18.
- Yang, X., Chen, A., Ning, B., Tang, T., (2016a) "A stochastic model for the integrated optimization on metro timetable and speed profile with uncertain train mass", *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 91, pp. 424-445.
- Yang, X., Chen, A., Ning, B., Tang, T., (2017c) "Bi-objective programming approach for solving the metro timetable optimization problem with dwell time uncertainty", *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, Vol. 97, pp. 22-37.
- Yang, X., Li, X., Ning, B., Tang, T., (2016b) "A survey on energy-efficient train operation for urban rail transit", *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, Vol. 17, No. 1, pp. 2-13.
- Yin, J., Tang, T., Yang, L., Gao, Z., Ran, B., (2016) "Energy-efficient metro train rescheduling with uncertain time-variant passenger demands: An approximate dynamic programming approach", *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 91, pp. 178-210.
- Yin, J., Yang, L., Tang, T., Gao, Z., Ran, B., (2017) "Dynamic passenger demand oriented metro train scheduling with energy-efficiency and waiting time minimization: Mixed-integer linear programming approaches", *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 97, pp. 182-213.
- Zhang, C., Zheng, L., Zhang, Z., Shi, L., Armstrong, A.J., (2010) "The allocation of berths and quay cranes by using a sub-gradient optimization technique", *Computers & Industrial Engineering*, Vol. 58, No. 1, pp. 40-50.
- Zhao, N., Roberts, C., Hillmanssen, S., Tian, Z., Weston, P., Chen, L., (2017) "An integrated metro operation optimization to minimize energy consumption", *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Vol. 75, pp. 168-182.

Urban Rail Scheduling to Minimize Traveler's Waiting Time with Lagrangian Relaxation Algorithm

ABSTRACT

Urban Railways is a safe and trustworthy rail transport system in urban areas, which optimizes the operation of train movements. It plays an essential role in reducing passenger costs. Increasing passenger waiting time reduces the level of service and thus reduces the utility of the use of the rail transport system. In this research, the scheduling problem of urban rail trains in double-track routes is addressed. The research objective is to minimize total waiting time of passengers at stations in conditions of demand dynamicity under capacity constraints. To this end, a new mixed-integer linear programming model based on the space-time network is presented. The present research contributes by proposing an innovative heuristic method based on Lagrangian relaxation algorithm, taking into account the time-dependent passenger arrival times and under the capacity constraints, fleet size, and rail infrastructure. Validation of the model was carried out using numerical tests based on operational data from underground Tehran city railways. The advantages of the proposed approach are discussed through the establishment of computational experiments on real data provided by the rail company compared to the existing solutions. Experimental results show that even in large-scale instances, the solution approach has a satisfactory quality and computational time, which indicates its effectiveness in the planning of urban railway trains. The computational results show that by maintaining the total number of services constant, and only by changing the train headways, a timetable can produce a better match with the travel demand pattern, thus reducing the waiting time for travelers.

Keywords:

Rail transport, passenger waiting time, underground railway, train capacity, Lagrangian relaxation