

Portfolio Optimization Problem with Markowitz's Mean-Variance Framework under Practical Constraints Using an Improved Genetic Algorithm

Mostafa Shabani¹ | Hossein Ghanbari² | Emran Mohammadi^{3*}

1. MSc in Industrial Engineering, Faculty of Industrial Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran
2. PhD Candidate in Industrial Engineering, Faculty of Industrial Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran
3. Associate Professor, Faculty of Industrial Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran (*Corresponding Author: E_mohammadi@iust.ac.ir - 02173225075)

Article Info	ABSTRACT
Article type: Research Article	Objective: The selection of an optimal investment portfolio is a pivotal concern within investment management, representing a focal point of extensive scholarly research and serving as a foundational framework for practitioners in the capital market. Originating from the seminal contributions of Harry Markowitz and the development of the mean-variance model, this area has garnered considerable attention. Despite the theoretical intricacies and the significant role of the mean-variance optimization model, it faces skepticism among participants in the capital market. A primary obstacle lies in the simplistic assumptions inherent in the classical mean-variance model, where optimal portfolios are constructed without imposing constraints on stock diversity or specifying the allocation percentages for each stock. Consequently, achieving a more comprehensive and realistic portfolio necessitates considering additional influential factors beyond risk and return in the modeling process. To address this gap, this study introduces an advanced mean-variance investment portfolio optimization model that integrates practical constraints such as cardinality constraints and upper and lower bounds. Methodology: By incorporating these constraints, the conventional quadratic optimization model is transformed into a mixed-integer quadratic problem, requiring the utilization of meta-heuristic algorithms. In this context, the research utilizes the genetic algorithm, recognized as a pragmatic meta-heuristic algorithm for navigating highly complex mathematical models. To enhance the efficiency of the genetic algorithm, the study introduces and employs a novel intersection operator, aiming to generate superior solutions within the genetic algorithm's framework. Conclusion: The effectiveness of the proposed methodology is evaluated using well-established databases in the meta-heuristics literature. The findings of this research highlight the remarkable efficiency and effectiveness of the proposed approach in addressing the challenges associated with portfolio optimization within the context of mean-variance models.
Article history: Received: 18 March 2021 Revised: 10 June 2021 Accepted: 16 June 2021	
Keywords: Portfolio optimization Mean-Variance model Improved genetic algorithm Cardinality constraint	

Cite this article: Shabani, M., Ghanbari, H., & Mohammadi, E. (2024). Portfolio Optimization Problem with Markowitz's Mean-Variance Framework under Practical Constraints Using an Improved Genetic Algorithm. *Academic Librarianship and Information Research*, 54 (4), 1-20. DOI: 00000000000000000000

© The Author(s).

DOI: 0000000000000000000000000000

, Vol. , No. , 2020, pp. .

بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری مبتنی بر رویکرد میانگین-واریانس مارکویتز تحت محدودیت‌های

کاربردی با استفاده از یک الگوریتم ژنتیک بهبودیافته

مصطفی شبانی^۱ | حسین قنبری^۲ | عمران محمدی^{۳*}

چکیده

هدف و ضرورت: انتخاب سبد سرمایه‌گذاری بهینه، یکی از مسائل مهم در زمینه مدیریت سرمایه‌گذاری می‌باشد که با تحقیقات پیشگامانه هری مارکویتز و ارائه مدل میانگین-واریانس به یک حوزه داغ تحقیقاتی برای پژوهشگران و یک چارچوب مناسب برای فعالان بازارهای سرمایه تبدیل گردیده است. علی‌رغم ظرافت نظری و اهمیت مدل بهینه‌سازی میانگین-واریانس، این رویکرد با شک و تردید در میان فعالان بازارهای سرمایه مورد استفاده قرار می‌گیرد. یکی از دلایل اصلی این مشکل این است که سبدهای بهینه تشکیل شده با استفاده از مدل کلاسیک میانگین-واریانس شامل مفروضات بسیار ساده‌ای نظیر تشکیل سبد سرمایه‌گذاری بدون در نظر گرفتن محدودیتی برای تنوع سهام انتخاب شده یا درصد سرمایه‌گذاری شده در هر سهم می‌باشد. به همین منظور برای تشکیل یک سبد کارا و واقع‌گرایانه باید سایر عوامل تأثیرگذار برای سرمایه‌گذاران علاوه بر ریسک و بازدهی در مدل‌سازی در نظر گرفته شود. در همین راستا این مطالعه به ارائه یک مدل بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری توسعه‌یافته میانگین-واریانس با در نظر گرفتن محدودیت‌های کاربردی از قبیل محدودیت کاردینالیتی و محدودیت‌های سقف و کف می‌پردازد.

روش شناسی: در نظر گرفتن این محدودیت‌ها در مدل‌سازی ریاضی، مدل بهینه‌سازی درجه دو سنتی را به یک مسئله درجه دوم عدد صحیح مختلط تبدیل می‌کند که برای مواجه با آن نیازمند به کارگیری الگوریتم‌های فراابتکاری می‌باشد. به همین منظور این پژوهش از الگوریتم ژنتیک به عنوان یکی از کاربردی‌ترین الگوریتم‌های فراابتکاری برای حل مدل‌های ریاضی با درجه پیچیدگی بالا استفاده می‌کند و به جهت افزایش کارایی این الگوریتم در این مطالعه یک عملگر تقاطع نوین برای تولید جواب‌های بهتر در ساختار الگوریتم ژنتیک معرفی و استفاده می‌گردد.

یافته‌ها و نتیجه‌گیری: کارایی رویکرد پیشنهادی در پایگاه‌های داده معروف در حوزه ادبیات فراابتکاری مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج حاصل از این پژوهش بیانگر کارایی و اثربخشی بالای رویکرد پیشنهادی می‌باشد.

کلیدواژه‌ها: بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری، مدل میانگین-واریانس، الگوریتم ژنتیک بهبودیافته، محدودیت کاردینالیتی

استناد: شبانی، مصطفی؛ قنبری، حسین؛ و محمدی، عمران (۱۴۰۳). بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری مبتنی بر رویکرد میانگین-واریانس مارکویتز تحت محدودیت‌های کاربردی با استفاده از یک الگوریتم ژنتیک بهبودیافته.

پذیرش مقاله:

دریافت مقاله:

^۱ کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

^۲ دانشجوی دکتری مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

^{۳*} دانشیار، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران (E_mohammadi@iust.ac.ir - 0217322507)

۱. مقدمه

سرمایه‌گذاری از دیدگاه کلان نقش بسزایی بر توسعه‌ی اقتصادی و رشد سطح رفاهی جوامع دارد و از دیدگاه خرد سرمایه‌گذاران را قادر می‌سازد تا از سرمایه‌ی خود سود کسب کنند و در عین حال از ثروت خود در برابر زیان‌های ناشی از تورم محافظت کنند (باقریان و همکاران، ۲۰۲۳؛ فوئیک و همکاران، ۲۰۲۲؛ قنبری و همکاران، ۲۰۲۲). علاوه بر این، سرمایه‌گذاری به طور قابل توجهی باعث پیشرفت‌های تکنولوژیکی و توسعه پایدار می‌گردد (شاو، ۱۹۵۶). نهادهای سرمایه‌گذاری که با مدل‌های تخصیص دارایی پیچیده هدایت می‌شوند، نقش محوری در بازارهای سرمایه ایفا می‌کنند و باعث افزایش نقدینگی و کشف قیمت می‌شوند؛ بنابراین، استقرار معقول و استراتژیک سرمایه‌گذاری برای رفاه اقتصادی بلندمدت و ایجاد ثروت ضروری است (برنسون و همکاران، ۱۹۹۵). همچنین تحقیقات صورت گرفته توسط پژوهشگران نشان می‌دهد که سرمایه‌گذاری سرمایه‌گذاران خرد تحت تأثیر عواملی مانند میزان تحمل ریسک، شرایط بازار و احساسات سرمایه‌گذار قرار دارد (کوپین و همکاران، ۲۰۱۷). و این امر سرمایه‌گذار را ملزم می‌دارد تا با استراتژی‌های هدفمند به تصمیم‌گیری بپردازد (قنبری و همکاران، ۲۰۲۳). پس همانطور که مطرح شد اتخاذ یک استراتژی و راهبرد کارا عنصر بسیار حیاتی‌ای برای تمامی فعالان بازارهای سرمایه می‌باشد. راهبردهای سرمایه‌گذاری طیف وسیعی از رویکردها را در بر می‌گیرند که هدف آن‌ها بهبود عملکرد سبد سرمایه‌گذاری و مدیریت ریسک است. یکی از استراتژی‌های کاربردی برای پخش ریسک حاصل از سرمایه‌گذاری تنوع‌بخشی می‌باشد، تنوع‌بخشی در سرمایه‌گذاری باعث کاهش ریسک حاصل از سرمایه‌گذاری می‌شود و تخصیص کارآمدتر منابع را تضمین می‌کند (مارکوویتز، ۱۹۵۲). شالوده نظری بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری نیز بر تنوع‌بخشی استوار است که باعث پدیدآمدن نظریه نوین سبد سرمایه‌گذاری^۱ گردید این نظریه بر ترکیب کارآمد دارایی‌ها برای دستیابی به بالاترین بازده ممکن برای یک سطح ریسک معین یا بالعکس تأکید می‌کند. مطالعات تجربی اهمیت تخصیص دارایی، تنوع‌بخشی و متعادل‌سازی در افزایش کارایی سبد سرمایه‌گذاری در طول زمان را برجسته می‌کند. پژوهشگران استدلال می‌کنند که راهبردهای مدیریت فعال، مانند تخصیص دارایی تاکتیکی و سرمایه‌گذاری مبتنی بر عوامل، می‌توانند با بهره‌برداری از ناکارآمدی‌های بازار، بازده مازاد ایجاد کنند. علاوه بر این، گنجاندن سرمایه‌گذاری‌های جایگزین، مشتقات در ساخت سبد سرمایه‌گذاری در تحقیقات اخیر موردتوجه قرار گرفته است. تکنیک‌های بهینه‌سازی، از جمله تحلیل میانگین-واریانس، حداکثر کردن نسبت شارپ و معیارهای ریسک نزولی، نقش اساسی در طراحی سبدهای سرمایه‌گذاری قوی که با ترجیحات و اهداف ریسک سرمایه‌گذاران همسو هستند، ایفا می‌کنند (اسکروچی و همکاران، ۲۰۲۳؛ قنبری و همکاران، ۲۰۲۳).

کاربرد نظریه نوین مارکوویتز به دلیل پیشگامانه و کاربردی بودن آن مشهور است، با این حال کاربرد عملی آن با محدودیت‌های ذاتی محصور شده است. علی‌رغم ظرافت نظری و اهمیت مدل بهینه‌سازی میانگین-واریانس، این رویکرد با شک و تردید در میان فعالان بازارهای سرمایه مورد استفاده قرار می‌گیرد. یکی از دلایل اصلی این مشکل این است که سبدهای بهینه تشکیل شده با استفاده از مدل کلاسیک میانگین-واریانس شامل مفروضات بسیار ساده‌ای نظیر تشکیل سبد سرمایه‌گذاری بدون در نظر گرفتن محدودیتی برای تنوع سهام انتخاب شده یا درصد سرمایه‌گذاری شده در هر سهم می‌باشد. به همین منظور برای تشکیل یک سبد کارا و واقع‌گرایانه باید سایر عوامل تأثیرگذار برای سرمایه‌گذاران علاوه بر ریسک و بازدهی در مدل‌سازی در نظر گرفته شود. از جمله محدودیت‌های کاربردی برای در نظر گرفتن در مدل‌سازی ریاضی مدل‌های تشکیل سبد سرمایه‌گذاری محدودیت‌های کاردینالیتی و سقف و کف می‌باشند. اما در نظر گرفتن محدودیت کاردینالیتی به‌تنهایی در مدل‌سازی ریاضی، مدل بهینه‌سازی درجه دو سنتی را به یک مسئله درجه دوم عدد صحیح مختلط تبدیل می‌کند که دارای درجه پیچیدگی محاسباتی بالایی می‌باشد و مواجه با آن با الگوریتم‌های دقیق صرفه زمانی مناسب را برای مسائل بزرگ ندارد به همین منظور برای مواجه با آن نیازمند به کارگیری الگوریتم‌های فراابتکاری می‌باشیم. الگوریتم‌های فراابتکاری نقش کلیدی در بهینه‌سازی مسائل پیچیده؛ مانند تخصیص بهینه سبد سرمایه‌گذاری ایفا می‌کنند. در میان این الگوریتم‌ها، الگوریتم ژنتیک به دلیل کاربردی بودن آن در اکثر حوزه‌های محاسباتی از جمله حوزه مورد بررسی محبوبیت بیشتری نسبت به سایر الگوریتم‌های فراابتکاری برخوردار است. با تقلید از اصول انتخاب طبیعی و تکامل، الگوریتم ژنتیک توانایی مقابله مؤثر با پیچیدگی ذاتی در بازارهای مالی را دارد. مکانیزم تطبیقی الگوریتم ژنتیک، عملگرهای تقاطع^۲ و نرخ جهش^۳ و در نظر گرفتن محدودیت‌ها، آن را به ابزاری قدرتمند برای مقابله با ماهیت پیچیده چالش‌های بهینه‌سازی سبد سهام در سناریوهای دنیای واقعی تبدیل می‌کند.

^۱ Modern Portfolio Theory (MPT)

^۲ Cross over

^۳ Mutation Rate

در این پژوهش با توجه به اهمیت در نظر گرفتن محدودیت‌های کاربردی در مدل‌سازی ریاضی مدل‌های تشکیل سبد سرمایه‌گذاری بهینه ابتدا به ارائه یک مدل ریاضی با در نظر گرفتن محدودیت‌های کاردینالیتی و سقف و کف می‌پردازد و سپس برای حل مدل مذکور این پژوهش از الگوریتم ژنتیک به‌عنوان یکی از کاربردی‌ترین الگوریتم‌های فراابتکاری برای حل مدل ریاضی پیشنهادی به دلیل برخورداری از درجه پیچیدگی بالا استفاده می‌کند. همچنین در این مطالعه به جهت افزایش کارایی این الگوریتم، یک عملگر تقاطع نوین برای تولید جواب‌های بهتر در ساختار الگوریتم ژنتیک معرفی و استفاده می‌گردد. به منظور بررسی کارایی رویکرد پیشنهادی این رویکرد با استفاده از داده‌های مالی موجود در پایگاه‌های داده معروف در حوزه ادبیات فراابتکاری مورد آزمایش قرار می‌گیرد و نتایج آن با نرم‌افزارهای حل دقیق مقایسه می‌شود.

باقی بخش‌های این پژوهش به‌صورت مقابل ساختاردهی شده است: در بخش ۲ مروری بر پیشینه پژوهش ارائه می‌گردد و در بخش ۳ ام مدل ریاضی تشکیل سبد سرمایه‌گذاری به تفصیل شرح داده می‌شود. بخش ۴ ام به توصیف الگوریتم ژنتیک پیشنهادی برای حل مدل ارائه شده اختصاص دارد. در بخش ۵ ام نتایج محاسباتی و اعتبارسنجی ارائه می‌گردد و در نهایت بخش ۶ ام مقاله را جمع‌بندی کرده و پیشنهاداتی برای تحقیقات آتی احتمالی ارائه می‌دهد.

۲. مروری بر پیشینه پژوهش

پس از پایه‌گذاری نظریه نوین سبد سرمایه‌گذاری توسط هری مارکویتز، پژوهشگران زیادی به سوی توسعه و پیشبرد ابزارهای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری گام برداشتند. محوریت اصلی این تحقیق پیشگامانه مارکویتز پیرامون مدل میانگین-واریانس می‌باشد به گونه‌ای که هدف آن ایجاد توازن بین بازدهی (میانگین) و به ریسک (واریانس) است. با این حال علی‌رغم ظرافت نظری و اهمیت مدل بهینه‌سازی میانگین-واریانس، این رویکرد با شک و تردید در میان فعالان بازارهای سرمایه مورد استفاده قرار می‌گیرد. یکی از دلایل اصلی این مشکل این است که سبدهای بهینه تشکیل شده با استفاده از مدل کلاسیک میانگین-واریانس شامل مفروضات بسیار ساده‌ای نظیر تشکیل سبد سرمایه‌گذاری بدون در نظر گرفتن محدودیتی برای تنوع سهام انتخاب شده یا درصد سرمایه‌گذاری شده در هر سهم می‌باشد. به همین منظور برای تشکیل یک سبد کارا و واقع‌گرایانه باید سایر عوامل تأثیرگذار برای سرمایه‌گذاران علاوه بر ریسک و بازدهی در مدل‌سازی در نظر گرفته شود. از جمله محدودیت‌های کاربردی برای در نظر گرفتن در مدل‌سازی ریاضی مدل‌های تشکیل سبد سرمایه‌گذاری محدودیت‌های کاردینالیتی و سقف و کف می‌باشند. اما در نظر گرفتن محدودیت کاردینالیتی به‌تنهایی در مدل‌سازی ریاضی، مدل بهینه‌سازی درجه دو سنتی را به یک مسئله درجه دوم عدد صحیح مختلط تبدیل می‌کند که دارای درجه پیچیدگی محاسباتی بالایی می‌باشد و در دسته مسائل NP-hard قرار می‌گیرد. در همین راستا نویسندگان مختلف با روش‌های گوناگون در تلاش بودند تا راه‌حلی منطقی و مناسب برای این دسته از مسائل پیدا کنند. تلاش پژوهشگران برای مواجهه با مسائل بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با در نظر گرفتن محدودیت کاردینالیتی در جدول ۱ به تفصیل تشریح شده است.

جدول ۱. مروری بر تحقیقات پیشین بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با در نظر گرفتن محدودیت کاردینالیتی

نویسندگان	نوع متدولوژی	رویکرد مورد استفاده
چنگ و همکاران (۲۰۰۰)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم ژنتیک الگوریتم تبرید شبیه‌سازی شده الگوریتم جستجوی ممنوعه
مارینگر و کلر (۲۰۰۳)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم جستجوی ممنوعه الگوریتم‌های تکاملی
فیلدسند و همکاران (۲۰۰۴)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم تکاملی چند هدفه
بوستی (۲۰۰۵)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم ژنتیک الگوریتم تبرید شبیه‌سازی شده
لی و همکاران (۲۰۰۶)	حل دقیق	الگوریتم لاگرانژ
مورال اسکودرو و همکاران (۲۰۰۶)	حل دقیق الگوریتم‌های فراابتکاری	برنامه ریزی درجه دوم الگوریتم ژنتیک
استریجن و یاماواکی (۲۰۰۶)	حل دقیق الگوریتم‌های فراابتکاری	برنامه ریزی درجه دوم الگوریتم تکاملی چند هدفه
چیام و همکاران (۲۰۰۷)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم تکاملی چند هدفه

نویسندگان	نوع متدولوژی	رویکرد مورد استفاده
فرناندز و گومز (۲۰۰۷)	الگوریتم‌های فراابتکاری	شبکه عصبی
اسکلهادونکت (۲۰۰۷)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم ژنتیک با ارزیابی برداری الگوریتم تکاملی مبتنی بر قوت پارتو
چیان و همکاران (۲۰۰۸)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم تکاملی چند هدفه
گل مکانی و همکاران (۲۰۰۸)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم سیستم ایمنی مصنوعی
شاو و همکاران (۲۰۰۸)	حل دقیق	الگوریتم لاگراژ
برانک و همکاران (۲۰۰۹)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم تکاملی چند هدفه
چنگ و همکاران (۲۰۰۹)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم ژنتیک
کورا (۲۰۰۹)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات
سلیمانی و همکاران (۲۰۰۹)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم ژنتیک
تای و همکاران (۲۰۰۹)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم محدب تفاضلی
دنگ و لین (۲۰۱۰)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم کلونی مورچگان
دنگ و لین (۲۰۱۰)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات
توربینانو و سوارز (۲۰۱۰)	حل دقیق الگوریتم‌های فراابتکاری	برنامه ریزی درجه دوم الگوریتم ژنتیک الگوریتم جستجوی ممنوعه الگوریتم تحلیل داده‌های اکتشافی
تومیدیس (۲۰۱۰)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم جستجوی ممنوعه الگوریتم ژنتیک الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات
آناگنوستوپولوس و مامانیس (۲۰۱۱ ب)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم ژنتیک رتبه بندی نامغلوب الگوریتم ژنتیک چندهدفه با مرتب‌سازی نامغلوب الگوریتم تکاملی مبتنی بر قوت پارتو الگوریتم تکاملی چند هدفه
آناگنوستوپولوس و مامانیس (۲۰۱۱ الف)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم ژنتیک چندهدفه با مرتب‌سازی نامغلوب نسخه دوم الگوریتم انتخاب مبتنی بر الگوی پارتو الگوریتم تکاملی مبتنی بر قوت پارتو نسخه دوم
گل مکانی و فاضل (۲۰۱۱)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات
مظفری (۲۰۱۱)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم تیرید شبیه‌سازی شده
ونگ و همکاران (۲۰۱۲)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم کلونی زنبور عسل
چن و همکاران (۲۰۱۲)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم کلونی زنبور عسل
دنگ و همکاران (۲۰۱۲)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم بهینه سازی ازدحام ذرات
موری و شک (۲۰۱۲)	حل دقیق	آزادسازی محلی CPLEX
مختاری و همکاران (۲۰۱۲)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات + شبکه عصبی
سجادی و همکاران (۲۰۱۲)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم ژنتیک
سزارون و همکاران (۲۰۱۳)	حل دقیق	برنامه ریزی درجه دوم CPLEX
چن و همکاران (۲۰۱۳)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم زنبور عسل
کو و همکاران (۲۰۱۳)	حل دقیق	آزادسازی محدب

نویسندگان	نوع متدولوژی	رویکرد مورد استفاده
		برنامه‌ریزی درجه دوم
فوکاراسی و لوندوفسکی (۲۰۱۳)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم تریید شبیه‌سازی‌شده
حاج نوری و همکاران (۲۰۱۳)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم بهینه‌سازی علف‌های هرز مهاجم
ک آتو و چنگ (۲۰۱۳)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم بهینه‌سازی جستجوی باکتری
کی لوین و کو (۲۰۱۳)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم یادگیری افزایشی مبتنی بر جمعیت الگوریتم تکاملی تفاضلی
آکورا-پرا و همکاران (۲۰۱۴)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم ژنتیک
لیاکوراس و متاکسیوتیس (۲۰۱۴)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم ژنتیک چندهدفه با مرتب‌سازی نامغلوب الگوریتم تکاملی مبتنی بر قوت پارتو
خین لوین و همکاران (۲۰۱۴)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم تکاملی چند هدفه
میشرا و همکاران (۲۰۱۴)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم بهینه‌سازی جستجوی باکتری
تویا و باکانین (۲۰۱۴)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم کلونی زنبور عسل الگوریتم کرم شب تاب
تویا و باکانین (۲۰۱۴)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم کرم شب تاب
بوستنی و همکاران (۲۰۱۵)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم کلونی مورچگان
چن (۲۰۱۵)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم کلونی زنبور عسل
جی و همکاران (۲۰۱۵)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم کلونی زنبور عسل
کمیلی و ریفی (۲۰۱۵)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام گریه
ورجر و برموز (۲۰۱۵)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم تکاملی چند هدفه
نی و همکاران (۲۰۱۵)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات
	حل دقیق	برنامه‌ریزی درجه دوم
بایکاس اوغلو (۲۰۱۵)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم جستجوی انطباق تصادفی حریصانه
نی و همکاران (۲۰۱۷)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات
سابوریدو (۲۰۱۶)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم تکاملی چند هدفه
سوتی وانگ و سودانیل (۲۰۱۶)	الگوریتم‌های فراابتکاری	الگوریتم کلونی زنبور عسل

همانطور که در مرور ادبیات نیز مشهود است با بزرگ شدن مقیاس مسئله روش‌های دقیق نمی‌توانند راه حلی ایده‌آل برای مواجهه با این مسئله باشند به همین منظور اکثر پژوهشگران به استفاده از الگوریتم‌های فراابتکاری روی آورده‌اند. در میان این الگوریتم‌های فراابتکاری نیز رویکردهای مبتنی بر یک جواب مانند الگوریتم‌های تریید شبیه‌سازی شده^۱ و یا الگوریتم جستجوی ممنوعه^۲ محبوبیت کمتری نسبت به رویکردهای مبتنی بر جمعیت مانند الگوریتم ژنتیک و یا الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات^۳ داشتند. همچنین اگرچه ماهیت مسئله بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری یک مسئله چند هدفه می‌باشد اما محققین بیشتر ترجیح می‌دهند تا از رویکردهای متنوع برای تک هدفه کردن مسئله مانند رویکرد مجموع وزنی بهره بگیرند تا همزمان با هر دو تابع هدف سر و کار نداشته باشند.

۳. مدل ریاضی

مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری بهینه، نخستین بار توسط مارکویتز (۱۹۵۲) به عنوان یک اصل اساسی در حوزه سرمایه‌گذاری معرفی گردید. هری مارکویتز در تحقیقات پیشگامانه خود سرمایه‌گذاران را افرادی ریسک‌گرا در نظر گرفت و در همین راستا مدل میانگین-واریانس را معرفی نمود که هدف آن کمینه کردن واریانس برای سطح مورد انتظاری از بازدهی یا بالعکس می‌باشد. مدل میانگین واریانس توسعه‌یافته با محدودیت کاردنالیته و محدودیت سقف و کف که به عنوان دو مورد از محبوب‌ترین محدودیت‌ها در فرمول‌بندی مدل‌های انتخاب سبد سرمایه‌گذاری مورد استفاده قرار می‌گیرند، به شرح زیر تعریف می‌شود:

^۱ Simulated Annulling (SA)

^۲ Tabu Search (TS)

^۳ Particle swarm optimization (PSO)

۱-۳. پارامترهای مدل ریاضی

مجموعه متغیرهایی که مقدار آنها از قبل تعیین شده است و تصمیم‌گیری باید با فرض کردن آنها انجام شود. در این پژوهش مقادیر ثابتی که پیش از حل مدل باید از اسناد، مدارک و تجزیه و تحلیل داده‌های جمع‌آوری شده تعیین شوند، مطابق جدول ۲ است.

جدول ۲: پارامترهای مدل بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری

پارامتر	شرح
N	تعداد دارایی‌های موجود
μ_i	بازده مورد انتظار دارایی i ($i = 1, 2, \dots, N$)
R^*	بازده مورد انتظار
l_i	حداقل نسبت دارایی i ($i = 1, 2, \dots, N$)
u_i	حداکثر نسبت دارایی i ($i = 1, 2, \dots, N$)
K	تعداد موردنظر از دارایی‌ها در سبد سرمایه‌گذاری
σ_{ij}	همبستگی بین دارایی i و دارایی j ($i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, N$)

۲-۳. متغیرهای تصمیم

مجموعه متغیرهایی که باید برای مقدار آنها تصمیم‌گیری شود یا مجموعه متغیرهایی که بیان‌کننده انتخاب تصمیم‌گیرنده است. در این پژوهش متغیرهای تصمیم مدل ریاضی w_i و Z_i که نمایانگر نسبت دارایی i و وضعیت انتخاب دارایی i است.

۳-۳. مدل پیشنهادی

مدل پیشنهادی به منظور تشکیل سبد سرمایه‌گذاری بهینه با محدودیت‌های کاردینالیتی و سقف و کف به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$\text{Minimize } \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} \quad (1)$$

Subjected to:

$$\sum_{i=1}^N w_i \mu_i = R^* \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^N Z_i = K \quad (4)$$

$$l_i Z_i \leq w_i \leq u_i Z_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

$$Z_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

$$0 \leq w_i \leq 1 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

$$0 \leq l_i \leq u_i \leq 1 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

معادله (۱) به هدف کمینه کردن واریانس کل سبد سرمایه‌گذاری می‌پردازد، در حالی که معادله (۲) تضمین می‌کند که بازدهی در سطح مورد نظر حاصل شود. معادله (۳) اطمینان می‌دهد که کل بودجه، سرمایه‌گذاری شود. معادله (۴) محدودیت تعداد دارایی‌ها را توصیف می‌کند که تعداد دارایی‌های نگهداری شده در سبد سرمایه‌گذاری را محدود می‌کند، در حالی که معادله (۵) محدودیت‌های کمینه و بیشینه را توصیف می‌کند که نسبت دارایی‌ها را در محدوده داده شده $[l_i, u_i]$ تنظیم می‌کند. متغیر تصمیم‌گیری Z_i در معادله (۶) برای انتخاب دارایی‌ها تعریف شده است. معادله (۷) تاکید می‌کند که نسبت دارایی‌ها نباید منفی باشد، به این معنا که فروش سهم مجاز نیست، و معادله (۸) محدوده‌های متغیر را تعریف می‌کند.

در مدل‌های چندهدفه، ممکن است امکان بهینه‌سازی همه توابع هدف به طور هم‌زمان وجود نداشته باشد؛ بنابراین، برای حل این مشکل، لازم است که به برخی از اهداف اولویت داده شود و از روش‌هایی مانند رویکرد مجموع وزنی^۱ استفاده گردد. روش مجموع وزنی مجموعه‌ای از اهداف را در یک هدف واحد با تخصیص وزن مرتبط به یک هدف ترکیب می‌کند تا آن را بر هدف دیگر اولویت دهد. همان‌طور که در معادله (۹) مشاهده می‌شود، تابع هدف درجه دو به دنبال بهترین تعادل بین دو هدف متعارض بیشینه کردن بازدهی و کمینه کردن ریسک است که با یک پارامتر λ وزن‌دهی شده است.

$$\text{Minimize } \lambda \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} \right] - (1 - \lambda) \left[\sum_{i=1}^N w_i \mu_i \right] \quad (9)$$

Subjected to:

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^N Z_i = K \quad (11)$$

$$l_i Z_i \leq w_i \leq u_i Z_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (12)$$

$$Z_i = \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (13)$$

$$0 \leq w_i \leq 1 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (14)$$

$$0 \leq l_i \leq u_i \leq 1 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (15)$$

پارامتر وزن‌دهی λ که نشان‌دهنده اولویت ریسک‌گریزی سرمایه‌گذاران است، مقادیر مختلفی را بین ۰ و ۱ به خود اختصاص می‌دهد. واضح است که حساسیت سرمایه‌گذار به ریسک با افزایش مقدار λ از صفر به یک افزایش می‌یابد. هنگامی که $\lambda = 1$ باشد، سرمایه‌گذار بسیار محافظه‌کار خواهد بود زیرا در این حالت تابع هدف به دنبال کمینه کردن ریسک است. در صورتی که $\lambda = 0$ نشان‌دهنده این است که سرمایه‌گذار بسیار ریسک‌پذیر است و به دنبال به دست آوردن بازده بیشینه است چرا که در این حالت تابع هدف مدل به دنبال بیشینه کردن بازده است. پارامتر λ تعادل میان ریسک و بازده را برای $0 < \lambda < 1$ به دست می‌آورد.

۴. الگوریتم ژنتیک

الگوریتم ژنتیک از جمله رویکردهای مورد مطالعه و استفاده در ادبیات الگوریتم‌های تکاملی می‌باشد که ثابت کرده‌اند که در حل بسیاری از مسائل بهینه‌سازی با درجه پیچیدگی بالا بسیار کارا می‌باشند و در طول چند دهه گذشته توجه فزاینده‌ای را به خود جلب کرده‌اند. الگوریتم ژنتیک که در ابتدا توسط هلند (۱۹۷۵) معرفی گردید را می‌توان به عنوان یک تکنیک جستجو و بهینه‌سازی اکتشافی بر اساس اصل معروف انتخاب طبیعی از داروین و عبارت شناخته شده (سازگارتین‌ها زنده می‌مانند) توصیف کرد. این اصل معروف از داروین به این اشاره دارد که افرادی که سازگاری بیشتری با محیط پیرامون خود ایجاد می‌کنند شانس بیشتری برای زنده ماندن و تولید مثل خواهند داشت، درحالی‌که افرادی که کمتر سازگار می‌باشند در طول زمان حذف خواهند شد. الگوریتم ژنتیک با الهام از این اصل این فرایند را با گرفتن یک جمعیت اولیه از افراد و اعمال عملگرهای ژنتیکی در هر تولید مثل شبیه‌سازی می‌کند.

¹ Weighted Sum

در الگوریتم ژنتیک، یک جمعیت اولیه متشکل از کروموزوم‌ها (چند راه‌حل عملی) به طور تصادفی تولید می‌شود که در مسئله بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری، هر کروموزوم بیانگر نسبت هر دارایی در سبد سرمایه‌گذاری می‌باشد. در ادامه والدین از این جمعیت برای تولیدمثل و تشکیل فرزند انتخاب می‌شوند که در نتیجه، نسل دوم ترکیبی از فرزندان و والدین آن‌ها است. برای ارزیابی هر کروموزوم، یک تابع ارزیابی تشکیل می‌شود که نشان می‌دهد ترکیب چقدر خوب نشان‌دهنده کروموزوم است. عملگرهای متقاطع و جهش در فرایند “تولیدکننده” دخالت می‌کنند و در هر نسل، مطلوبیت کروموزوم توسط تابع ارزیابی محاسبه می‌شود که از تابع عینی مدل به دست می‌آید. هر چه مقدار تناسب بیشتر باشد، ارزش تابع عینی که راه‌حل دارد بهتر است. عملگر انتخاب تضمین می‌کند که رشته‌هایی با تناسب بالاتر احتمال بیشتری دارند که در نسل بعدی ظاهر شوند. مراحل اساسی یک الگوریتم ژنتیک ساده را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد (چنگو همکاران، ۲۰۰۰ ب):

جدول ۳: ساختار پایه‌ای الگوریتم ژنتیک

Generate an initial population
Evaluate fitness of individuals in the population
Repeat:
 Select parents from the population
 Recombine (mate) parents to produce children using cross over and mutation operators
 Evaluate fitness of the children
 Replace some or all of the population by the children
Until a satisfactory solution has been found.

دو جنبه مهم در الگوریتم ژنتیک، سیستم کدگذاری و تعریف تابع ارزیابی می‌باشد که باید این موارد در الگوریتم مورد استفاده به صورت کامل شرح داده شود. به همین منظور در این بخش، به تشریح این موارد در الگوریتم مورد استفاده در این پژوهش تخصیص داده شده است: مرحله نخست مختص به انتخاب استراتژی انتخاب جمعیت می‌باشد. در این پژوهش استراتژی انتخاب به صورت زیر تعیین می‌شود:

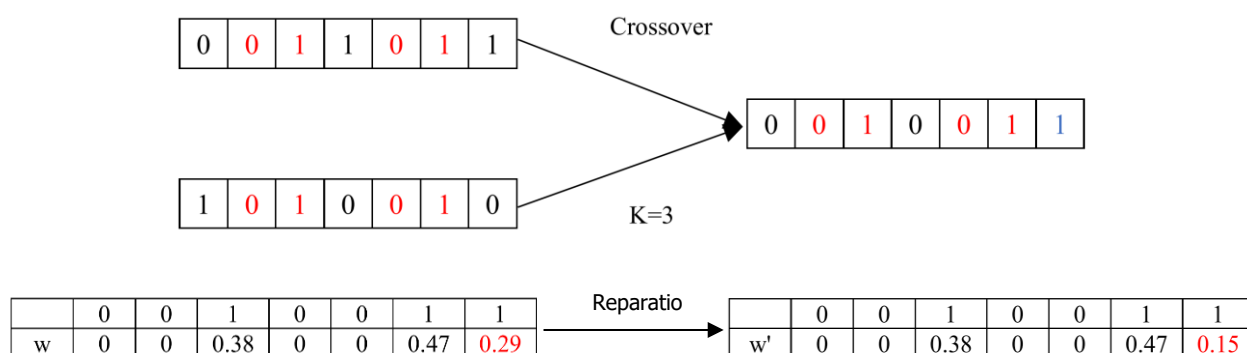
- ارزیابی افراد در جمعیت با استفاده از تابع ارزیابی
- مرتب‌سازی جمعیت بر اساس مقدار تابع ارزیابی
- نیمی از افراد متناسب با بالاترین مقدار تابع ارزیابی به نسل بعدی منتقل می‌شوند
- انتخاب والدین به صورت تصادفی
- هر والد با استفاده از عملگرهای متقاطع و نرخ جهش، یک فرزند تولید می‌کند
- این فرزندان که نیمی از جمعیت را تشکیل می‌دهند، به نسل بعدی منتقل می‌شوند و در نهایت، نیمی از افراد متناسب با بالاترین مقدار تابع ارزیابی و فرزندان تولید شده، نسل بعدی را تشکیل می‌دهند.

در مرحله دوم، استراتژی انتخاب عملگر متقاطع که بر اساس عملگر رار^۱ رادکلیف (۱۹۹۱) بنا شده است به صورت زیر تعیین می‌شود.

- اگر هر دو والد دارای یک ویژگی خاص باشند، آن ویژگی به خصوصیات فرزند ایجاد شده اختصاص می‌یابد و مقدار آن ویژگی در فرزند به طور تصادفی عددی بین مقادیر تخصیص داده شده به دو والد می‌باشد.
- برعکس، اگر هر دو والد در شرایطی باشند که ویژگی خاصی را نداشته باشند، آن ویژگی به طور قطع در سبد فرزند ایجاد شده وجود نخواهد داشت.
- اگر یک والد دارای یک ویژگی خاص باشد که دیگری دارای آن ویژگی نمی‌باشد، تخصیص آن ویژگی به فرزند بسته به آن که ظرفیت فرزند تکمیل شده است یا خیر تصمیم‌گیری می‌گردد. اگر ویژگی به فرزند تخصیص داده شد مقدار آن مقداری تصادفی بین ۰ تا مقدار والدی که دارای آن ویژگی می‌باشد است.

در همین حال، تمام محدودیت‌ها به طور پویا ویژگی‌های فرزند تولید شده را کنترل می‌کنند و در صورت عدم امکان‌سنجی، فرایند متقاطع تکرار می‌شود.

¹ RaR Operator



شکل ۱. (الف) استراتژی انتخاب عملگر متقاطع (ب) ترمیم الگوریتم ژنتیک پیشنهادی

بخش ۵ به بررسی و تأیید کد الگوریتم ژنتیک اختصاص دارد. در این بخش، به تشریح مفاهیم و مدل‌های مربوط به الگوریتم ژنتیک پرداخته می‌شود تا درک عمیق‌تری از عملکرد ارائه شود.

۵. نتایج محاسباتی

در این بخش ابتدا تعریف مسئله و تنظیم پارامترها معرفی می‌شود. سپس نتایج تجربی الگوریتم ژنتیک پیشنهادی و مقایسه آن با حل‌کننده دقیق به تفصیل ارائه شده است.

۵-۱. تعریف مسئله

برای ارزیابی نتایج محاسباتی برای یک دسته مسئله خاص، مهم است که مجموعه داده‌های معیار در دسترس محققان باشد تا کارایی الگوریتم‌های آن‌ها و کیفیت راه‌حل‌های آن‌ها را مقایسه کنند. رایج‌ترین مجموعه داده‌های در دسترس عموم برای مسئله‌های انتخاب سبد سرمایه‌گذاری توسط بیزلی^۱ ارائه شده است (<http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/portinfo.html>). مجموعه داده حاضر شامل قیمت‌های هفتگی شاخص‌های مختلف بورس از مارس ۱۹۹۲ تا سپتامبر ۱۹۹۷ است. ماتریس‌های کوواریانس و بردارهای بازده مورد انتظار نیز در این مجموعه داده ارائه شده‌اند. الگوریتم پیشنهادی در این مقاله بر روی این مسئله معیار شناخته شده و در دسترس عموم، با استفاده از قیمت‌های هفتگی شاخص‌های منتخب که در جدول ۴ شرح داده شده‌اند، مورد آزمایش قرار گرفت. نتایج این آزمایش با حل دقیق برنامه‌ریزی درجه دوم عدد صحیح مختلط در نرم‌افزار گمز^۲ مقایسه شد. الگوریتم ژنتیکی پیشنهادی در زبان برنامه‌نویسی پایتون پیاده‌سازی و بر روی یک کامپیوتر شخصی با پردازنده INTEL CORE i7-2630QM CPU@2.00GHZ اجرا گردید.

جدول ۴: شاخص‌های منتخب این پژوهش از پایگاه داده بیزلی

شاخص	کشور/شهر	تعداد سهام
Hang Seng	هنگ کنگ	31
DAX 100	آلمان	85
FTSM 100	انگلستان	89
S&P 100	آمریکا	98

^۱ Beasley

^۲ General algebraic modeling system (GAMS)

۲-۵. تنظیم پارامتر

در این زیربخش، توضیحات مرتبط با تنظیمات پارامترهای مورداستفاده در الگوریتم ژنتیک پیشنهادی ارائه می‌شود. افراد آشنا با الگوریتم‌های اکتشافی به‌وضوح درک دارند که تعیین مقادیر پارامترها اغلب امر ضروری بوده و بخش حیاتی از رویکرد به حل مسائل خاص محسوب می‌شود. در این بخش، روش تعیین مقادیر پارامترها از طریق آزمایش متعدد مقادیر مختلف با استفاده از مجموعه داده‌های انتخاب شده توضیح داده شده است. پارامترهایی که برای الگوریتم ژنتیک پیشنهادی تصمیم‌گیری نیاز بوده‌اند، شامل اندازه جمعیت، عملگر تقاطع، و نرخ جهش بوده‌اند. نتایج به‌دست‌آمده نشان داد که الگوریتم ژنتیک پیشنهادی پس از انجام بیش از ۶۰ تکرار به همگرایی رسیده است. بهترین مقادیر برای پارامترهای عملگر تقاطع و نرخ جهش به ترتیب ۰/۸ و ۰/۳ بوده است. اندازه جمعیت نیز با اجرای الگوریتم در ۱۰۰ موجب حاصل شد. بهترین مقادیر پارامترها برای همه الگوریتم‌ها در جدول ۵ ارائه شده‌اند و برای تمام موارد ثابت نگه داشته شده‌اند تا امکان ارزیابی استحکام و مقیاس‌پذیری تکنیک‌ها امکان‌پذیر گردد.

جدول ۵. تنظیم پارامتر الگوریتم ژنتیک

پارامترها	دامنه مورد آزمایش	مقدار پیشنهادی
نرخ تقاطع	0.1-0.9	0.8
نرخ جهش	0.1-0.9	0.3
اندازه جمعیت	50-200	100

۳-۵. نتایج تجربی

در این بخش ابتدا برخی از نتایج تجربی را در مورد دقت و کارایی الگوریتم ژنتیک پیشنهادی ارائه می‌دهد. به‌منظور ارزیابی کارایی الگوریتم پیشنهادی و شناسایی پرتفوی‌های بهینه عملی، مجموعه‌ای از آزمایش‌ها طراحی و اجرا شد. سپس، نتایج حاصل از الگوریتم ژنتیک پیشنهادی با نتایج مدل پیاده‌سازی شده در نرم‌افزار گمز مقایسه و تحلیل گردید. محدوده‌های پایین l_i و بالای u_i با استفاده از مقادیر ۰/۰۵ و ۰/۴۰ به ترتیب تنظیم گردیده‌اند. همچنین، محدودیت‌های کاردینالیتی با اختصاص مقادیر ۴، ۶، ۸، ۱۰ و ۱۰ به K اعمال شده است. انتخاب مقادیر $K = ۴, ۶, ۸, ۱۰$ با توجه به نظر متخصصان و با توجه به مشاهده چندین مجموعه داده از این مقادیر، انجام شده است. با استفاده از این پارامترها، ما چهار سناریو به ازای هر مجموعه داده ایجاد کردیم و نتایج آزمایشات برای الگوریتم ژنتیک پیشنهادی به شرح زیر ارائه شده است:

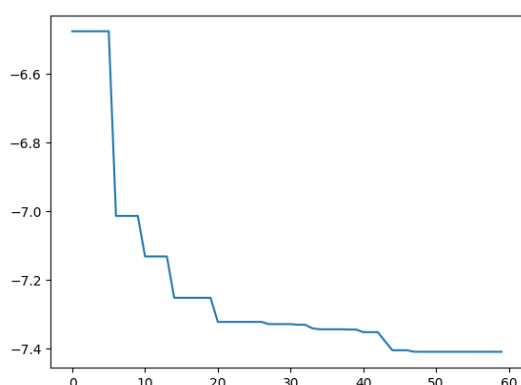
جدول ۶: نتایج آزمایش‌ها برای الگوریتم ژنتیک پیشنهادی با $K = ۴, ۶, ۸, ۱۰$

شخص	K	تابع هدف	w_i
Hang Seng	4	7.409864	$w_5 = 0.3675$
			$w_{19} = 0.1906$
	6	7.134635	$w_9 = 0.3027$
			$w_{29} = 0.1400$
Hang Seng	6	7.134635	$w_5 = 0.3425$
			$w_{19} = 0.1100$
	8	6.404415	$w_8 = 0.0500$
			$w_{26} = 0.1200$
Hang Seng	8	6.404415	$w_9 = 0.2123$
			$w_{29} = 0.1695$
	10	5.79827	$w_5 = 0.2516$
			$w_{19} = 0.0715$
Hang Seng	10	5.79827	$w_8 = 0.0890$
			$w_{20} = 0.0600$
	10	5.79827	$w_9 = 0.1278$
			$w_{26} = 0.0699$
Hang Seng	10	5.79827	$w_{12} = 0.1588$
			$w_{29} = 0.1731$
	10	5.79827	$w_5 = 0.1666$
			$w_{19} = 0.1076$
Hang Seng	10	5.79827	$w_8 = 0.0825$
			$w_{20} = 0.0747$
	10	5.79827	$w_9 = 0.1341$
			$w_{23} = 0.0500$

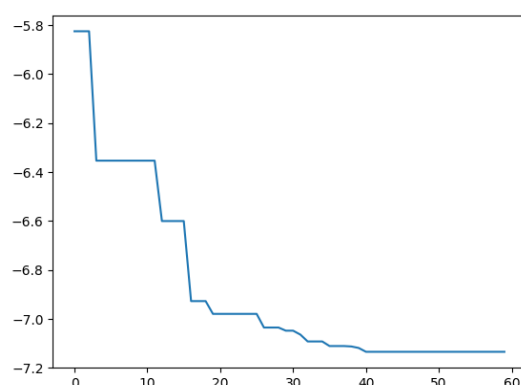
شاخص	K	تابع هدف	w_i
DAX 100	4	7.164399	$w_{12} = 0.1200$
			$w_{26} = 0.0979$
			$w_{13} = 0.0778$
			$w_{29} = 0.0900$
	6	6.179166	$w_2 = 0.1881$
			$w_{30} = 0.1800$
			$w_{13} = 0.3172$
			$w_{38} = 0.3184$
	8	5.990968	$w_{13} = 0.2140$
			$w_{38} = 0.3235$
			$w_{14} = 0.0600$
			$w_{49} = 0.1502$
FTSM 100	10	5.488935	$w_{15} = 0.1348$
			$w_{74} = 0.1166$
			$w_6 = 0.0696$
			$w_{43} = 0.0850$
	4	6.543098	$w_{13} = 0.2399$
			$w_{68} = 0.0710$
			$w_{37} = 0.1423$
			$w_{73} = 0.0784$
	6	6.267821	$w_{38} = 0.2479$
			$w_{77} = 0.0913$
			$w_{12} = 0.0700$
			$w_{43} = 0.0841$
S&P 100	8	6.132065	$w_{13} = 0.0925$
			$w_{59} = 0.0730$
			$w_{27} = 0.0963$
			$w_{71} = 0.0750$
	10	5.779291	$w_{29} = 0.0717$
			$w_{73} = 0.0600$
			$w_{38} = 0.2904$
			$w_{77} = 0.0913$
	4	8.172097	$w_{10} = 0.2700$
			$w_{29} = 0.2400$
			$w_{18} = 0.3338$
			$w_{71} = 0.1600$
	6	7.815207	$w_2 = 0.0900$
			$w_{29} = 0.1955$
			$w_{10} = 0.1414$
			$w_{37} = 0.1457$
	8	7.330372	$w_{18} = 0.2797$
			$w_{71} = 0.1500$
			$w_2 = 0.0875$
			$w_{37} = 0.1115$
	10	6.845504	$w_{10} = 0.1628$
			$w_{55} = 0.0785$
			$w_{18} = 0.2945$
			$w_{71} = 0.0925$
	6	7.7330372	$w_{29} = 0.1069$
			$w_{82} = 0.0700$
			$w_2 = 0.0798$
			$w_{37} = 0.0900$
	8	7.330372	$0w_9 = 0.065$
			$w_{44} = 0.0600$
			$w_{10} = 0.1548$
			$w_{55} = 0.0847$
	10	6.845504	$w_{18} = 0.1861$
			$w_{71} = 0.0830$
			$w_{29} = 0.1208$
			$w_{82} = 0.0800$
	4	8.172097	$w_{34} = 0.3238$
			$w_{82} = 0.3125$
			$w_{42} = 0.2475$
			$w_{89} = 0.1200$
	6	7.815207	$w_2 = 0.0970$
			$w_{42} = 0.2586$
			$w_{14} = 0.0900$
			$w_{82} = 0.2793$
	8	7.330372	$w_{34} = 0.1778$
			$w_{89} = 0.1013$
			$w_2 = 0.0974$
			$w_{42} = 0.1729$
	10	6.845504	$w_{14} = 0.1214$
			$w_{43} = 0.0600$
			$w_{23} = 0.0792$
			$w_{82} = 0.1489$
	6	7.815207	$w_{34} = 0.2084$
			$w_{89} = 0.1166$
			$w_2 = 0.1200$
			$w_{43} = 0.0650$
	8	7.330372	$w_{14} = 0.0742$
			$w_{76} = 0.0794$
			$w_{34} = 0.1040$
			$w_{82} = 0.1729$

شاخص	K	تابع هدف	w_i
			$w_{36} = 0.0600$
			$w_{89} = 0.1250$
			$w_{42} = 0.1252$
			$w_{93} = 0.0788$

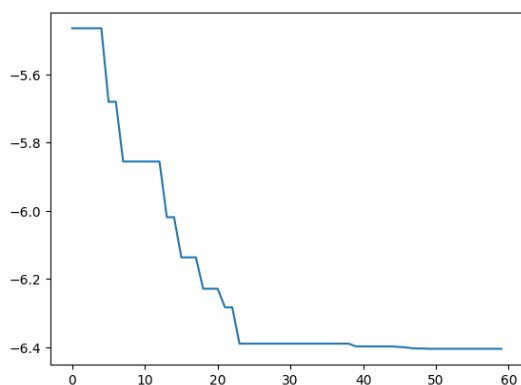
شکل‌های ۲ الی ۵ مقایسه عملکرد همگرایی الگوریتم ژنتیک پیشنهادی را برای هر سناریو نشان می‌دهد. این نمودارها عملکرد الگوریتم را در تعداد دفعات تکرار نشان می‌دهند و نشان می‌دهند که چگونه به راه‌حل بهینه نزدیک می‌شود.



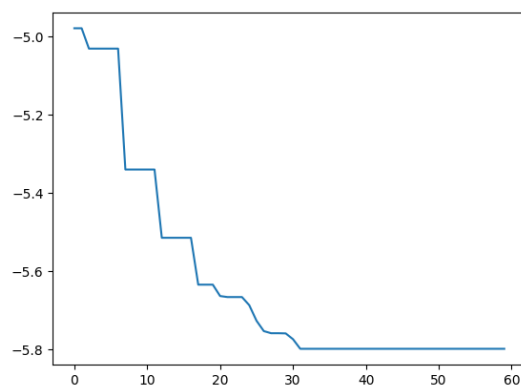
(a) $k = 4$



(b) $k = 6$



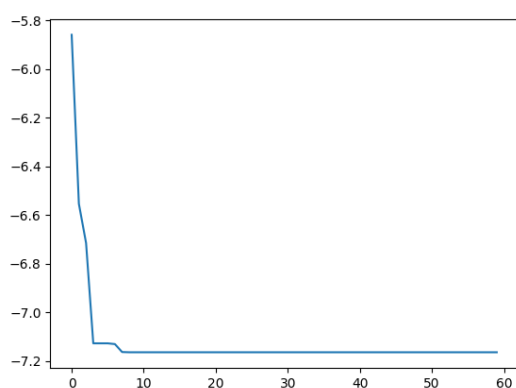
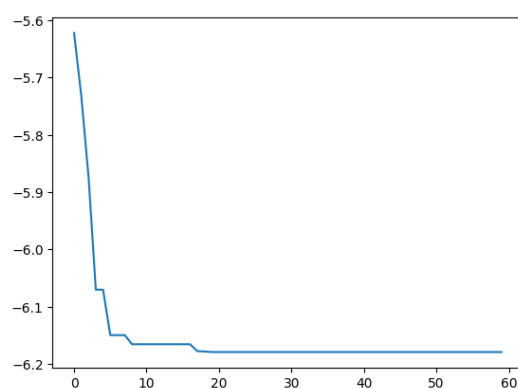
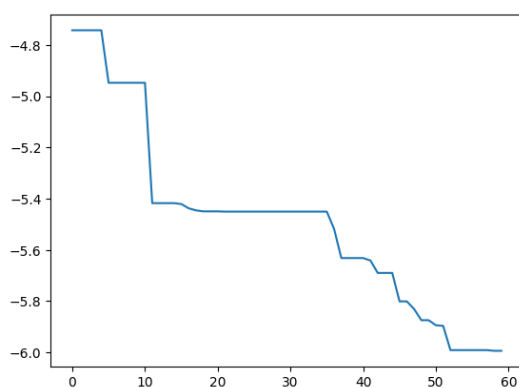
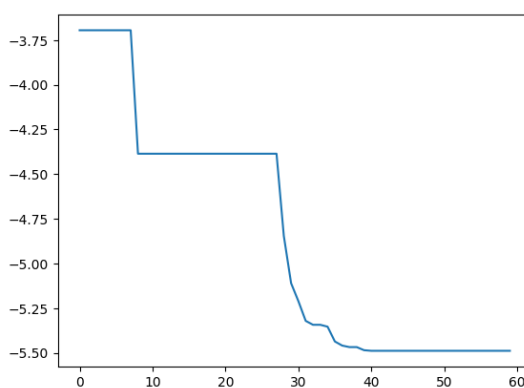
(c) $k = 8$



(d) $k = 10$

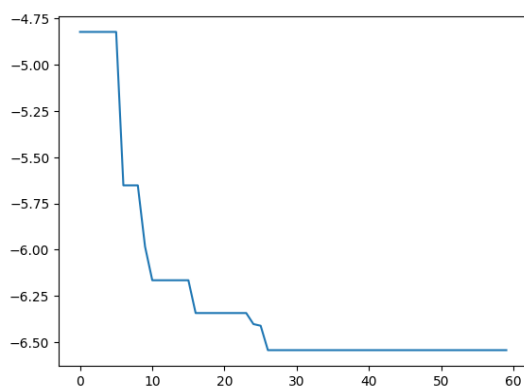
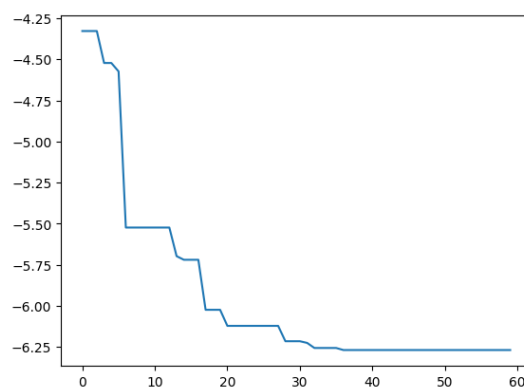
شکل ۲. مقایسه عملکرد همگرایی الگوریتم ژنتیک پیشنهادی برای $l_i = 0.05$ و $u_i = 0.4$ تحت محدودیت‌های کاردینالیتی مختلف برای شاخص

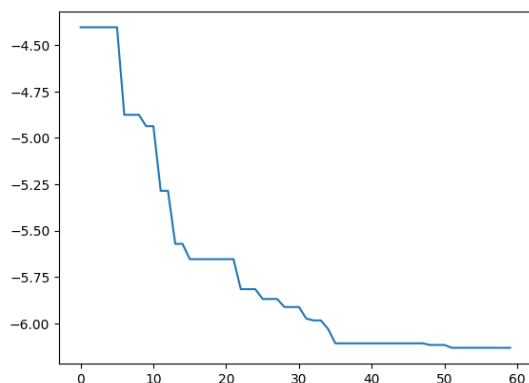
Hang Seng

(a) $k = 4$ (b) $k = 6$ (c) $k = 8$ (d) $k = 10$

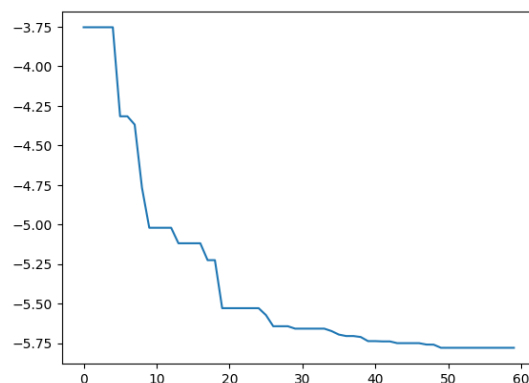
شکل ۳. مقایسه عملکرد همگرایی الگوریتم ژنتیک پیشنهادی برای $l_i = 0.05$ و $u_i = 0.4$ تحت محدودیت‌های کاردینالیتی مختلف برای شاخص

DAX 100

(a) $k = 4$ (b) $k = 6$

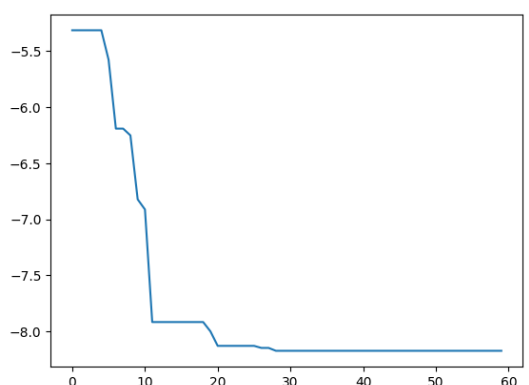


(c) $k = 8$

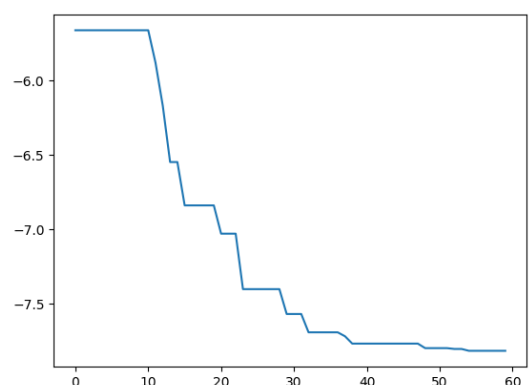


(d) $k = 10$

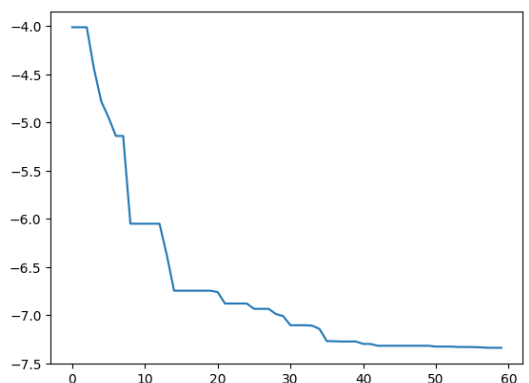
شکل ۴. مقایسه عملکرد همگرایی الگوریتم ژنتیک پیشنهادی برای $l_i = 0.05$ و $u_i = 0.4$ تحت محدودیت های کاردینالیتی مختلف برای شاخص FTSM 100



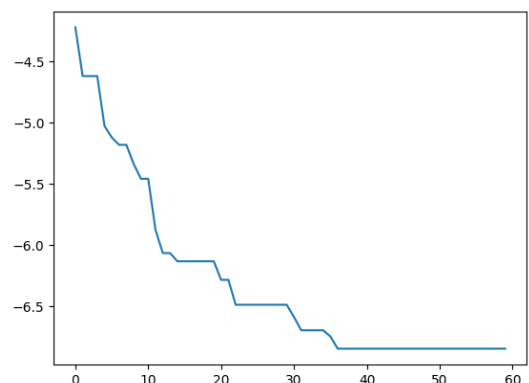
(a) $k = 4$



(b) $k = 6$



(c) $k = 8$



(d) $k = 10$

شکل ۵. مقایسه عملکرد همگرایی الگوریتم ژنتیک پیشنهادی برای $l_i = 0.05$ و $u_i = 0.4$ تحت محدودیت های کاردینالیتی مختلف برای شاخص S&P

به‌منظور بررسی صحت و کارایی الگوریتم ژنتیک پیشنهادی، ما برخی از نتایج محاسباتی را ارائه می‌دهیم که در آن دقت و کارایی الگوریتم اکتشافی را با حل‌کننده برنامه‌ریزی درجه دوم عدد صحیح مختلط^۱ در نرم‌افزار گمز مقایسه می‌کنیم. آزمایش‌ها به‌منظور $K = 4, 6, 8, 10$ انجام می‌شوند. جدول ۷ نتایج عددی توسط هر دو الگوریتم پیشنهادی و روش دقیق مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

جدول ۷: نتایج حاصل از تجزیه و تحلیل سناریوهای مختلف برای $l_i = 0.05$ و $u_i = 0.4$

شاخص	l_i	u_i	K	رویکرد دقیق	رویکرد ژنتیک پیشنهادی	اختلاف (%)
Hang Seng	0.05	0.4	4	7.4099	6.1038	21.4%
			6	7.1346	6.0454	18.0%
			8	6.4044	5.8836	8.9%
			10	5.7983	5.6945	1.8%
DAX 100	0.05	0.4	4	6.5410	7.1644	9.5%
			6	6.3367	6.1792	2.5%
			8	5.9736	5.9910	0.3%
			10	5.5903	5.4889	1.8%
FTSM 100	0.05	0.4	4	5.3106	6.5431	23.2%
			6	5.2445	6.2678	19.5%
			8	5.1078	6.1321	20.1%
			10	4.9586	5.7793	16.6%
S&P 100	0.05	0.4	4	6.4745	8.1721	26.2%
			6	6.3333	7.8152	23.4%
			8	6.1117	7.3304	19.9%
			10	5.8409	6.8455	17.2%

نتایج محاسباتی نشان می‌دهد که الگوریتم ژنتیک پیشنهادی برای این مدل می‌تواند در مدت زمان نسبتاً کوتاهی به راه‌حل‌های نزدیک به بهینه دست یابد.

۶. نتیجه‌گیری و بحث

در این تحقیق، یک چارچوب پیشنهادی برای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری بر اساس مدل میانگین-واریانس مارکویتز مورد بررسی قرار گرفته است. این چارچوب شامل محدودیت‌های کاردینالی و همچنین محدودیت‌های سقف و کف می‌باشد که در عمل به وقوع می‌پیوندد. با این حال، این چارچوب از نظر محاسباتی با چالش‌هایی مواجه است. محدودیت‌های مطرح شده، مسئله بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری را به یک مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم عدد صحیح مختلط تبدیل کرده و الگوریتم‌های محاسباتی کارآمد برای آن هنوز به توسعه نیافته‌اند. در این پژوهش، از یک الگوریتم ژنتیک برای حل چارچوب پیشنهادی استفاده شده است که به دلیل تعلق به کلاس NP-Hard، مسائل پیچیده بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری را به‌خوبی حل می‌کند. هدف اصلی این تحقیق بررسی عملکرد الگوریتم ژنتیک در حل مسائل پیچیده بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری بوده است. نتایج آزمایش‌های تجربی نشان می‌دهند که الگوریتم ژنتیک پیشنهادی، در زمان نسبتاً کوتاه، به بهترین حل‌های نزدیک به دست می‌آید. این حل‌ها نه تنها قابل استفاده در عمل هستند، بلکه همچنین بهره‌وری مدل میانگین-واریانس را بهبود می‌بخشند.

در نهایت، سه زمینه برای تحقیقات آینده پیشنهاد می‌گردد: (۱) در نظر گرفتن سایر محدودیت‌های بازار واقعی مانند هزینه‌های معاملاتی و محدودیت‌های نقد شوندگی؛ (۲) ارائه‌ی مدل پیشنهادی به صورت یک مدل چند دوره‌ای؛ (۳) بکارگیری سایر الگوریتم‌های فراابتکاری با در نظر گرفتن عملگر تقاطع پیشنهادی برای حل مدل بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری پیشنهادی و مقایسه عملکرد و نتایج آن‌ها.

¹ Quadratic Mixed Integer Programming (QMIP)

منابع

- Ackora-Prah, J., Gyamerah, S. A., Andam, P. S., & Gyamfi, D. (2014). Pattern search for portfolio selection. *Applied Mathematical Sciences*, 8, 7137–7147. <https://doi.org/10.12988/ams.2014.46425>
- Anagnostopoulos, K. P., & Mamanis, G. (2011a). Multiobjective evolutionary algorithms for complex portfolio optimization problems. *Computational Management Science*, 8(3), 259–279. <https://doi.org/10.1007/s10287-009-0113-8>
- Anagnostopoulos, K. P., & Mamanis, G. (2011b). The mean–variance cardinality constrained portfolio optimization problem: An experimental evaluation of five multiobjective evolutionary algorithms. *Expert Systems with Applications*. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2011.04.233>
- Bacanin, N., & Tuba, M. (2014). Firefly Algorithm for Cardinality Constrained Mean-Variance Portfolio Optimization Problem with Entropy Diversity Constraint. *The Scientific World Journal*, 2014, 1–16. <https://doi.org/10.1155/2014/721521>
- Bagheriyan M, Ghanbari H, & Tohidi H. (2023). The Impact of gold and oil prices on the Nasdaq Composite. *7th International Conference on Researches in Science & Engineering & 4th International Congress on Civil*.
- Baykasoğlu, A., Yunusoglu, M. G., & Burcin Özsoydan, F. (2015). A GRASP based solution approach to solve cardinality constrained portfolio optimization problems. *Computers & Industrial Engineering*, 90, 339–351. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2015.10.009>
- Branke, J., Scheckenbach, B., Stein, M., Deb, K., & Schmeck, H. (2009). Portfolio optimization with an envelope-based multi-objective evolutionary algorithm. *European Journal of Operational Research*, 199(3), 684–693. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2008.01.054>
- Brinson, G. P., Hood, L. R., & Beebower, G. L. (1995). Determinants of Portfolio Performance. *Financial Analysts Journal*, 51(1). <https://doi.org/10.2469/faj.v51.n1.1869>
- Cesarone, F., Scozzari, A., & Tardella, F. (2013). A new method for mean-variance portfolio optimization with cardinality constraints. *Annals of Operations Research*, 205(1), 213–234. <https://doi.org/10.1007/s10479-012-1165-7>
- Chang, T.-J., Meade, N., Beasley, J. E., & Sharaiha, Y. M. (2000a). Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. *Computers & Operations Research*, 27(13), 1271–1302. [https://doi.org/10.1016/S0305-0548\(99\)00074-X](https://doi.org/10.1016/S0305-0548(99)00074-X)
- Chang, T.-J., Meade, N., Beasley, J. E., & Sharaiha, Y. M. (2000b). Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. *Computers & Operations Research*, 27(13), 1271–1302. [https://doi.org/10.1016/S0305-0548\(99\)00074-X](https://doi.org/10.1016/S0305-0548(99)00074-X)
- Chang, T.-J., Yang, S.-C., & Chang, K.-J. (2009). Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, 36(7), 10529–10537. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2009.02.062>
- Chen, A. H. L., Liang, Y.-C., & Liu, C.-C. (2012). An artificial bee colony algorithm for the cardinality-constrained portfolio optimization problems. *2012 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, 1–8. <https://doi.org/10.1109/CEC.2012.6252920>
- Chen, A. H. L., Liang, Y.-C., & Liu, C.-C. (2013). Portfolio optimization using improved artificial bee colony approach. *2013 IEEE Conference on Computational Intelligence for Financial Engineering & Economics (CIFER)*, 60–67. <https://doi.org/10.1109/CIFER.2013.6611698>
- Chen, W. (2015). Artificial bee colony algorithm for constrained possibilistic portfolio optimization problem. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 429, 125–139. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2015.02.060>

- Chiam, S. C., Al Mamun, A., & Low, Y. L. (2007). A realistic approach to evolutionary multiobjective portfolio optimization. *2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, 204–211. <https://doi.org/10.1109/CEC.2007.4424473>
- Chiam, S. C., Tan, K. C., & Al Mamun, A. (2008). Evolutionary multi-objective portfolio optimization in practical context. *International Journal of Automation and Computing*, 5(1), 67–80. <https://doi.org/10.1007/s11633-008-0067-2>
- Cui, X. T., Zheng, X. J., Zhu, S. S., & Sun, X. L. (2013). Convex relaxations and MIQCQP reformulations for a class of cardinality-constrained portfolio selection problems. *Journal of Global Optimization*, 56(4), 1409–1423. <https://doi.org/10.1007/s10898-012-9842-2>
- Cura, T. (2009). Particle swarm optimization approach to portfolio optimization. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10(4), 2396–2406. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2008.04.023>
- Deng, G.-F., & Lin, W.-T. (2010). *Ant Colony Optimization for Markowitz Mean-Variance Portfolio Model* (pp. 238–245). https://doi.org/10.1007/978-3-642-17563-3_29
- Deng, G.-F., Lin, W.-T., & Lo, C.-C. (2012). Markowitz-based portfolio selection with cardinality constraints using improved particle swarm optimization. *Expert Systems with Applications*, 39(4), 4558–4566. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2011.09.129>
- Eskorouchi A, Ghanbari H, & Mohammadi E. (2023). A Scientometric Analysis of Robust Portfolio Optimization. *Iranian Journal of Accounting, Auditing and Finance*.
- F. S.-2006 I. I., & 2006, undefined. (n.d.). The effect of local search on the constrained portfolio selection problem. *Ieeexplore.Ieee.OrgF Streichert, M Tanaka-Yamawaki2006 IEEE International Conference on Evolutionary Computation, 2006•ieeexplore.Ieee.Org*. Retrieved February 22, 2024, from <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/1688601/>
- F Busetti. (2005). *Metaheuristic approaches to realistic portfolio optimization*. <https://arxiv.org/abs/cond-mat/0501057>
- Fernández, A., & Gómez, S. (2007). Portfolio selection using neural networks. *Computers & Operations Research*, 34(4), 1177–1191. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2005.06.017>
- Fieldsend, J. E., Matatko, J., & Peng, M. (2004). *Cardinality Constrained Portfolio Optimisation* (pp. 788–793). https://doi.org/10.1007/978-3-540-28651-6_117
- Fogarasi, N., & Levendovszky, J. (2013). Sparse, mean reverting portfolio selection using simulated annealing. *Algorithmic Finance*, 2(3–4), 197–211. <https://doi.org/10.3233/AF-13026>
- Foeeik, A. M. L., Ghanbari, H., Bagheriyan, M., & Mohammadi, E. (2022). Analyzing the effects of global oil, gold and palladium markets: Evidence from the Nasdaq composite index. *Journal of Future Sustainability*, 2(3), 105–112. <https://doi.org/10.5267/j.jfs.2022.9.010>
- Ghanbari, H., Foeeik, A. M. L., Eskorouchi, A., & Mohammadi, E. (2022). Investigating the effect of US dollar, gold and oil prices on the stock market. *Journal of Future Sustainability*, 2(3), 97–104. <https://doi.org/10.5267/j.jfs.2022.9.009>
- Ghanbari, H., Safari, M., Ghousi, R., Mohammadi, E., & Nakharutai, N. (2023). Bibliometric analysis of risk measures for portfolio optimization. *Accounting*, 9(2), 95–108. <https://doi.org/10.5267/j.ac.2022.12.003>
- Ghanbari, H., Shabani, M., & Mohammadi, E. (2023). Portfolio Optimization with Conditional Drawdown at Risk for the Automotive Industry. *Automotive Science and Engineering*, 13(4), 4236–4242. <https://doi.org/10.22068/ASE.2023.647>
- Golmakani, H. R., & Alishah, E. J. (2008). Portfolio selection using an artificial immune system. *2008 IEEE International Conference on Information Reuse and Integration, IEEE IRI-2008*. <https://doi.org/10.1109/IRI.2008.4583000>

- Golmakani, H. R., & Fazel, M. (2011). Constrained Portfolio Selection using Particle Swarm Optimization. *Expert Systems with Applications*, 38(7), 8327–8335. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2011.01.020>
- Hajnoori, A., Amiri, M., & Alimi, A. (2013). Forecasting stock price using grey-fuzzy technique and portfolio optimization by invasive weed optimization algorithm. *Decision Science Letters*, 2(3). <https://doi.org/10.5267/j.dsl.2013.04.004>
- Holland, J. H. (1975). Adaptation in natural and artificial systems : an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence. In *Ann Arbor University of Michigan Press 1975*.
- Kamili, H., & Riffi, M. E. (2015). Portfolio selection using the cat swarm optimization. *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*, 74(3).
- Kao, Y., & Cheng, H.-T. (2013). Bacterial Foraging Optimization Approach to Portfolio Optimization. *Computational Economics*, 42(4), 453–470. <https://doi.org/10.1007/s10614-012-9357-4>
- Koijen, R. S. J., Lustig, H., & Van Nieuwerburgh, S. (2017). The cross-section and time series of stock and bond returns. *Journal of Monetary Economics*, 88. <https://doi.org/10.1016/j.jmoneco.2017.05.006>
- Le Thi, H. A., Moeini, M., & Pham Dinh, T. (2009). Portfolio selection under downside risk measures and cardinality constraints based on DC programming and DCA. *Computational Management Science*, 6(4), 459–475. <https://doi.org/10.1007/s10287-009-0098-3>
- Liagkouras, K., & Metaxiotis, K. (2014). A new Probe Guided Mutation operator and its application for solving the cardinality constrained portfolio optimization problem. *Expert Systems with Applications*, 41(14), 6274–6290. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2014.03.051>
- Lin, S.-Y., Horng, S.-J., Kao, T.-W., Huang, D.-K., Fahn, C.-S., Lai, J.-L., Chen, R.-J., & Kuo, I.-H. (2010). An efficient bi-objective personnel assignment algorithm based on a hybrid particle swarm optimization model. *Expert Systems with Applications*, 37(12), 7825–7830. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2010.04.056>
- Lwin, K., & Qu, R. (2013). A hybrid algorithm for constrained portfolio selection problems. *Applied Intelligence*, 39(2), 251–266. <https://doi.org/10.1007/s10489-012-0411-7>
- Lwin, K., Qu, R., & Kendall, G. (2014). A learning-guided multi-objective evolutionary algorithm for constrained portfolio optimization. *Applied Soft Computing*, 24, 757–772. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2014.08.026>
- Maringer, D., & Kellerer, H. (2003). Optimization of cardinality constrained portfolios with a hybrid local search algorithm. *OR Spectrum*, 25(4). <https://doi.org/10.1007/s00291-003-0139-1>
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection, *Journal of Finance*. *Markowitz HM—1952*.
- Mishra, S. K., Panda, G., & Majhi, R. (2014). Constrained portfolio asset selection using multiobjective bacteria foraging optimization. *Operational Research*, 14(1), 113–145. <https://doi.org/10.1007/s12351-013-0138-1>
- Moral-Escudero, R., Ruiz-Torrubiano, R., & Suarez, A. (n.d.). Selection of Optimal Investment Portfolios with Cardinality Constraints. *2006 IEEE International Conference on Evolutionary Computation*, 2382–2388. <https://doi.org/10.1109/CEC.2006.1688603>
- Mozafari, M. (2011). A new IPSO-SA approach for cardinality constrained portfolio optimization. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 2(2), 249–262. <https://doi.org/10.5267/j.ijiec.2011.01.004>
- Murray, W., & Shek, H. (2012). A local relaxation method for the cardinality constrained portfolio optimization problem. *Computational Optimization and Applications*, 53(3), 681–709. <https://doi.org/10.1007/s10589-012-9471-1>

- Ni, Q., Yin, X., Tian, K., & Zhai, Y. (2017). Particle swarm optimization with dynamic random population topology strategies for a generalized portfolio selection problem. *Natural Computing*, 16(1), 31–44. <https://doi.org/10.1007/s11047-016-9541-x>
- Nicholas J. Radcliffe. (1991). Forma Analysis and Random Respectful Recombination. In *International Conference on Genetic Algorithms*.
- Ruiz-Torrubiano, R., & Suarez, A. (2010). Hybrid Approaches and Dimensionality Reduction for Portfolio Selection with Cardinality Constraints. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 5(2), 92–107. <https://doi.org/10.1109/MCI.2010.936308>
- Saborido, R., Ruiz, A. B., Bermúdez, J. D., Vercher, E., & Luque, M. (2016). Evolutionary multi-objective optimization algorithms for fuzzy portfolio selection. *Applied Soft Computing*, 39, 48–63. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2015.11.005>
- Sadigh, A. N., Mokhtari, H., Iranpoor, M., & Ghomi, S. M. T. F. (2012). Cardinality Constrained Portfolio Optimization Using a Hybrid Approach Based on Particle Swarm Optimization and Hopfield Neural Network. *Advanced Science Letters*, 17(1), 11–20. <https://doi.org/10.1166/asl.2012.3666>
- Sadjadi, S. J., Gharakhani, M., & Safari, E. (2012). Robust optimization framework for cardinality constrained portfolio problem. *Applied Soft Computing*, 12(1), 91–99. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2011.09.006>
- Samantha Bastiani, S., Cruz-Reyes, L., Fernandez, E., Gómez, C., & Rivera, G. (2015). *An Ant Colony Algorithm for Solving the Selection Portfolio Problem, Using a Quality-Assessment Model for Portfolios of Projects Expressed by a Priority Ranking* (pp. 357–373). https://doi.org/10.1007/978-3-319-17747-2_28
- Shaw, D. X., Liu, S., & Kopman, L. (2008). Lagrangian relaxation procedure for cardinality-constrained portfolio optimization. *Optimization Methods and Software*, 23(3), 411–420. <https://doi.org/10.1080/10556780701722542>
- Skolpadungket, P., Dahal, K., & Harnpornchai, N. (2007). Portfolio optimization using multi-objective genetic algorithms. *2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, 516–523. <https://doi.org/10.1109/CEC.2007.4424514>
- Soleimani, H., Golmakani, H. R., & Salimi, M. H. (2009). Markowitz-based portfolio selection with minimum transaction lots, cardinality constraints and regarding sector capitalization using genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, 36(3), 5058–5063. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2008.06.007>
- Solow, R. M. (1956). A Contribution to the Theory of Economic Growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 70(1), 65. <https://doi.org/10.2307/1884513>
- Suthiwong, D., & Sodanil, M. (2016). Cardinality-constrained Portfolio optimization using an improved quick Artificial Bee Colony Algorithm. *2016 International Computer Science and Engineering Conference (ICSEC)*, 1–4. <https://doi.org/10.1109/ICSEC.2016.7859943>
- Thomaidis, N. S. (2010). *Active Portfolio Management from a Fuzzy Multi-objective Programming Perspective* (pp. 222–231). https://doi.org/10.1007/978-3-642-12242-2_23
- Tian, F., Li, D. J., Fu, Q., Zhu, Z. F., Fu, Y. C., Wang, X. K., & Sun, C. Q. (2006). Construction of introgression lines carrying wild rice (*Oryza rufipogon* Griff.) segments in cultivated rice (*Oryza sativa* L.) background and characterization of introgressed segments associated with yield-related traits. *Theoretical and Applied Genetics*, 112(3), 570–580. <https://doi.org/10.1007/s00122-005-0165-2>
- Tuba, M., & Bacanin, N. (2014). Artificial bee colony algorithm hybridized with firefly algorithm for cardinality constrained mean-variance portfolio selection problem. *Applied Mathematics and Information Sciences*, 8(6). <https://doi.org/10.12785/amis/080619>

- Vercher, E., & Bermúdez, J. D. (2015). Portfolio optimization using a credibility mean-absolute semi-deviation model. *Expert Systems with Applications*, 42(20), 7121–7131. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2015.05.020>
- Wang, Z., Liu, S., & Kong, X. (2012). Artificial bee colony algorithm for portfolio optimization problems. *International Journal of Advancements in Computing Technology*, 4(4). <https://doi.org/10.4156/ijact.vol4.issue4.2>
- Yin, X., Ni, Q., & Zhai, Y. (2015). A novel PSO for portfolio optimization based on heterogeneous multiple population strategy. *2015 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, 1196–1203. <https://doi.org/10.1109/CEC.2015.7257025>
- Yu, J., Ge, J., Heuveling, J., Schneider, E., & Yang, M. (2015). Structural basis for substrate specificity of an amino acid ABC transporter. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 112(16), 5243–5248. <https://doi.org/10.1073/PNAS.1415037112>